

# TEMA 2: ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

## 2.1 Ecuaciones de conservación: modelos

Únicos cambios posibles que puede sufrir un sistema:

- Materia (masa o composición).
- Energía (cantidad o calidad).
- Movimiento (velocidad o dirección).

**Leyes de conservación de las propiedades extensivas:** El estado de un sistema está absolutamente definido cuando están especificadas su cantidad y composición de materia, su energía total y las componentes de velocidad de que está animado:

- Conservación de la materia.
- Conservación de la energía.
- Conservación del momento.

**Ecuación de conservación** (balance): Expresión de una ley de conservación de una propiedad extensiva de un sistema:

$$E + G = S + A \quad [2.1]$$

E: Velocidad de entrada de propiedad al sistema.

G: Velocidad de generación de propiedad en el interior del sistema.

S: Velocidad de salida de propiedad del sistema.

A: Velocidad de acumulación de propiedad en el interior del sistema.

## Modelo matemático:

- Ecuaciones de conservación
- Ecuaciones de estado
- Ecuaciones de equilibrio
- Ecuaciones cinéticas

## Tipos de modelos (materia como medio continuo):

- **Macroscópico**, fenomenológico, o de “caja negra”:

- Se desconoce el funcionamiento interno del sistema.
- Se representa el sistema como relación entre salidas y entradas.
- Baja complejidad matemática: aplicación de ecuaciones de conservación a recintos finitos produce ecuaciones algebraicas.

- **Microscópico**, representacional, o de “caja con mecanismos”:
  - Se establecen hipótesis sobre mecanismos internos (que hay que comprobar).
  - Se intenta representar conceptualmente el sistema.
  - Alta complejidad matemática: aplicación de ecuaciones de conservación a elementos diferenciales produce ecuaciones diferenciales.

## 2.2 La ecuación general de conservación

Ecuación de conservación genérica para las tres propiedades extensivas (materia, energía, momento):

$$A = (E - S) + G \quad [2.2]$$

Aplicarla al elemento que se indica en la **Figura 2.1**.

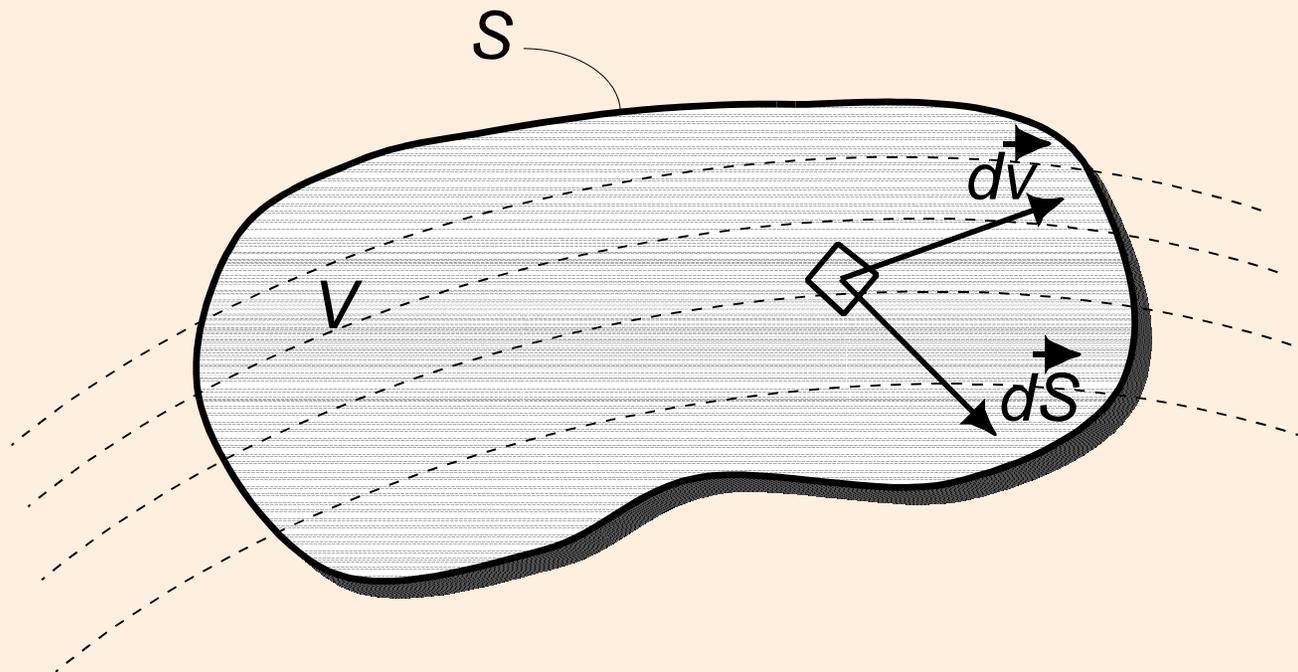


Figura 2.1: Elemento microscópico de fluido.

**Acumulación:**

$$A = \int_V \frac{\partial \Pi}{\partial t} dV \quad [2.3]$$

**Salida neta** ( $E - S$ ), debida a la circulación del fluido (**transporte másico** o **flujo advectivo**) o al potencial impulsor (que origina un flujo):

$$(E - S) = - \int_S \Pi \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S} - \int_S \phi dS \quad [2.4]$$

**Generación:**

$$G = \int_V G dV \quad [2.5]$$

Sustituyendo términos en [\[2.2\]](#):

$$\int_V \frac{\partial \Pi}{\partial t} dV = - \int_S \Pi \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S} - \int_S \phi d\vec{S} + \int_V G dV \quad [2.6]$$

Ecuación general para aplicación microscópica o macroscópica, aplicando condiciones límites para facilitar su resolución.

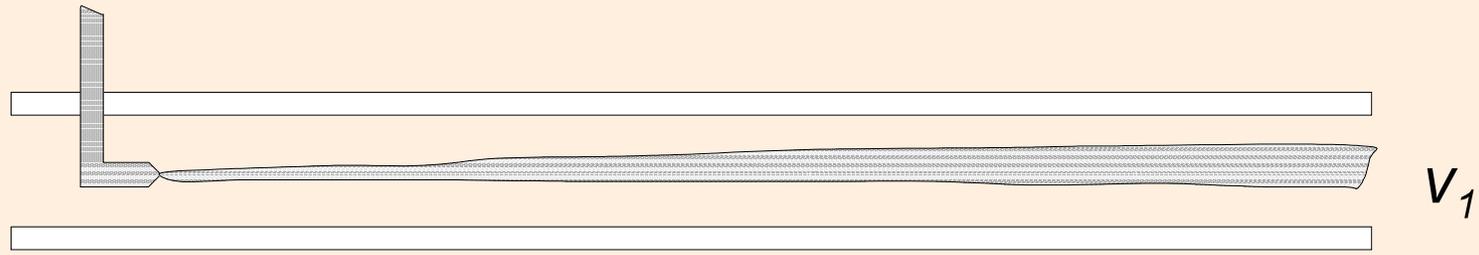
## 2.3 Análisis microscópico

Integrando [2.6] transformada a integrales de volumen (teorema de Gauss-Ostrogradskii):

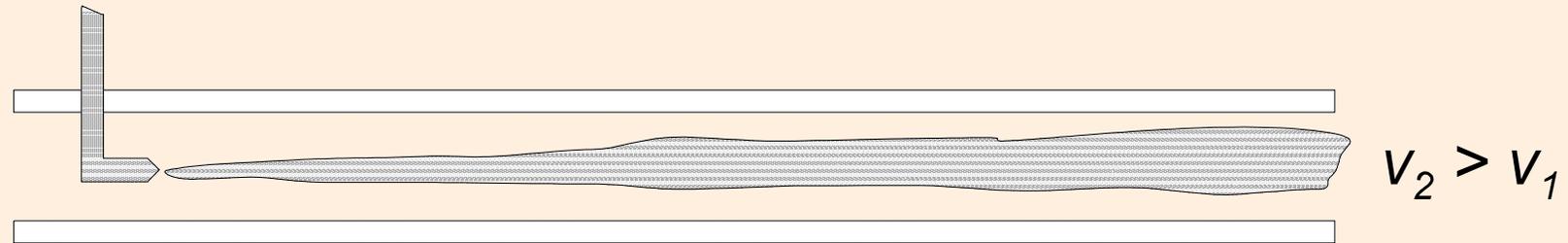
$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = - \nabla \cdot (\Pi \cdot \vec{v}) - \nabla \cdot \phi + G \quad [2.7]$$

## 2.3.1 Régimen de circulación de un fluido: mecanismos de transporte

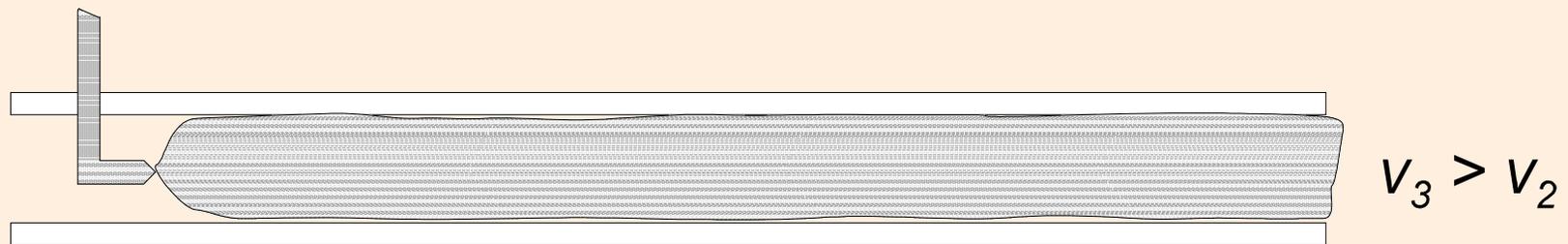
Cuando la velocidad de un fluido no es nula, pueden darse distintas condiciones de circulación (Reynolds, 1883), según muestra la **Figura 2.2**:



*Laminar*



*Transición*



*Turbulento*

Figura 2.2: Experimento de Reynolds.

Definición de **regímenes de circulación** del fluido y los **mecanismos de transporte** de las propiedades extensivas:

- **Régimen laminar:** Velocidad baja del fluido, sus partículas circulan en trayectorias paralelas, no hay mezcla macroscópica y las moléculas se desplazan debido al gradiente de concentración de propiedad (**transporte molecular**).
- **Régimen turbulento:** Velocidad alta del fluido, sus partículas se desplazan en todas direcciones, hay mezcla de grupos de moléculas al azar y los grupos de moléculas se desplazan debido a una contribución adicional dominante, superpuesta al transporte molecular (**transporte convectivo**).

Los regímenes de circulación se distinguen mediante el **módulo de Reynolds**, cociente entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de rozamiento:

$$Re = \frac{v \rho D}{\mu} \quad [2.8]$$

Para régimen *laminar* predomina el rozamiento, y **Re < 2.100**.

Para régimen *turbulento* predomina la inercia, y **Re > 10.000**.

## 2.3.2 Ecuaciones cinéticas de transporte

### 2.3.2.1 Transporte molecular: propiedades de transporte

En régimen laminar se produce transporte molecular, definido mediante la ecuación cinética genérica:

$$\phi = \frac{\textit{Potencial impulsor}}{\textit{Resistencia}} = \frac{\Delta \Pi}{R} \quad [2.9]$$

## Materia: Ley de Fick

$$\phi_z = N_{Az} \left[ \frac{\text{mol } A}{\text{m}^2 \text{ s}} \right] = - D_{AB} \frac{dC_A}{dz} \quad [2.10]$$

## Energía: Ley de Fourier

$$\phi_z = q_z \left[ \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{ s}} \right] = - k \frac{dT}{dz} = - \frac{k}{\rho C_p} \frac{d(\rho C_p T)}{dz} \quad [2.11]$$

## Cantidad de movimiento: Ley de Newton

$$\vec{\Phi}_z = \vec{\tau}_{zx} \left[ \frac{\text{kg } m}{\text{m}^2 \text{ s}} \right] = - \mu \frac{dv_x}{dz} = - \frac{\mu}{\rho} \frac{d(\rho v_x)}{dz} \quad [2.12]$$

Ecuaciones generalizables a las tres dimensiones para sustituirla en la ecuación de conservación microscópica, [2.7]:

$$\phi = - \delta \nabla \Pi \quad [2.13]$$

Simplificando la ecuación de conservación para régimen laminar pueden obtenerse **en algunos casos** los valores de concentración, temperatura o velocidad en todos los puntos del sistema.

## 2.3.2.2 Transporte convectivo: coeficientes de transporte

En régimen turbulento se produce transporte convectivo, que obliga a un análisis empírico formalmente similar al del transporte molecular, [2.9], definiendo el **coeficiente de transporte individual** (referido a una sola fase):

$$\phi = \frac{\Delta \Pi}{R} = \frac{\Delta \Pi}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon \Delta \Pi \quad [2.14]$$

**Materia** (Coeficiente individual de transferencia de materia):

$$\phi = N_A \left[ \frac{\text{mol } A}{\text{m}^2 \text{ s}} \right] = k_C (C_{A0} - C_A) \quad [2.15]$$

**Energía** (Coeficiente individual de transmisión de calor):

$$\phi = q \left[ \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{ s}} \right] = h (T_o - T) \quad [2.16]$$

**Cantidad de movimiento** (Factor de rozamiento superficial):

$$\phi = \tau \left[ \frac{\text{kg } m}{\text{m}^2 \text{ s}^2} \right] = - \frac{1}{2} f \rho v^2 \quad [2.17]$$

# Transporte convectivo en sistemas de más de una fase (**Figura 2.3**).

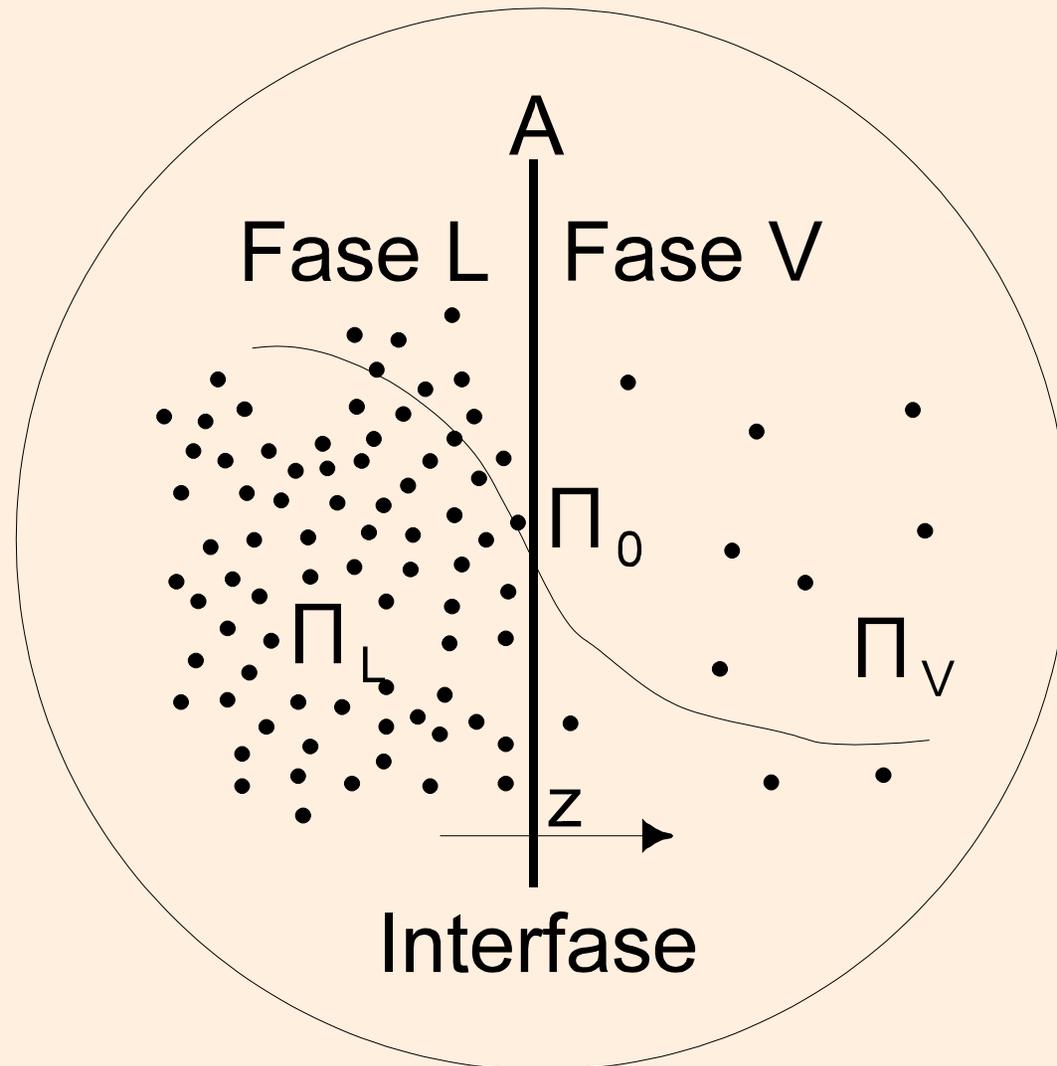


Figura 2.3: Transporte de propiedad entre fases.

Resistencias en serie (la resistencia interfacial se desprecia porque puede considerarse en equilibrio) producen un flujo:

$$\phi = \frac{\Pi_V - \Pi_o}{\frac{1}{\epsilon_V}} = \frac{\Pi_o - \Pi_L}{\frac{1}{\epsilon_L}} = \frac{\Pi_V - \Pi_L}{\frac{1}{\epsilon_V} + \frac{1}{\epsilon_L}} \quad [2.18]$$

Se define un **coeficiente de transporte global**, basado en la suma de resistencias:

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{\epsilon_V} + \frac{1}{\epsilon_L} \quad [2.19]$$

## 2.4 Análisis macroscópico

Se aplica la ecuación general de conservación:

$$\int_V \frac{\partial \Pi}{\partial t} dV = - \int_S \Pi \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S} - \int_S \phi d\vec{S} + \int_V G dV \quad [2.20]$$

Se aplica a un sistema genérico como el de la **Figura 2.4**:

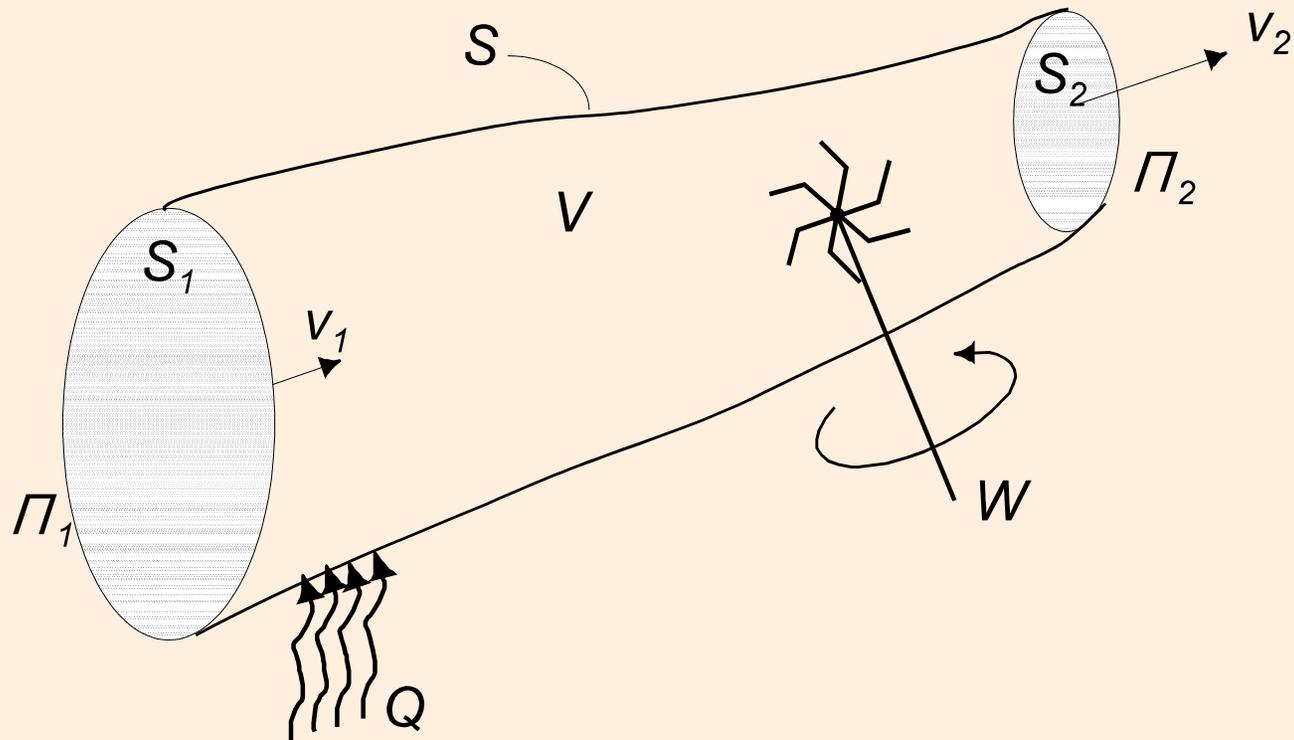


Figura 2.4: Elemento macroscópico de fluido.

Se obtiene la ecuación de conservación **macroscópica**:

$$\frac{d}{d t} \left( \Pi_m V \right) = \left[ \Pi_1 Q_1 - \Pi_2 Q_2 \right] - \sum_S \phi \cdot \vec{S} + G_m V \quad [2.21]$$

## 2.4.1 Balance macroscópico de materia

Aplicación de la ecuación [\[2.21\]](#) a un componente  $i$ :

$$\Pi = \rho_i$$

$$\Pi_m V = \rho_{im} V = m_{iT}$$

$$- \sum_S \phi \cdot \vec{S} = \vec{n}_{i1} \cdot \vec{S}_1 - \vec{n}_{i2} \cdot \vec{S}_2 + \vec{n}_i \cdot \vec{S}$$

[2.22]

$$G_m V = r_{im} V$$

Resultando:

$$\frac{d}{dt} (m_{iT}) = \left[ \rho_{i1} Q_1 - \rho_{i2} Q_2 \right] + \left[ \vec{n}_{i1} \vec{S}_1 - \vec{n}_{i2} \vec{S}_2 + \vec{n}_i \vec{S} \right] \quad [2.23]$$
$$+ r_{im} V$$

Simplificaciones:

- No hay flujo de materia a través de **S**.
- El transporte molecular a través de **S<sub>1</sub>** y **S<sub>2</sub>** es despreciable cuando hay movimiento del fluido.

Resulta la **ecuación macroscópica de conservación del componente i**:

$$\frac{d}{dt} (m_{iT}) = [ \rho_{i1} Q_1 - \rho_{i2} Q_2 ] + r_{im} V \quad [2.24]$$

Sumando todas las ecuaciones de los componentes individuales:

$$\sum_i m_{iT} = m_T$$

$$\sum_i \rho_i = \rho$$

[2.25]

$$\sum_i r_{im} = 0$$

Resulta la **ecuación macroscópica de conservación de la materia total**:

$$\frac{d}{dt} (m_T) = [ \rho_1 Q_1 - \rho_2 Q_2 ]$$

[2.26]

Desaparece el término de generación, ya que la materia total generada en el sistema es nula en unidades másicas; en unidades molares podría permanecer, ya que el número total de moles no necesariamente se conserva.

## 2.4.2 Balance macroscópico de energía

Aplicación de la ecuación [2.21] con los siguientes términos:

$$\begin{aligned}\Pi &= \rho (E_c + E_p + U) \\ \Pi_m V &= E_{cT} + E_{pT} + U_T \\ - \sum_S \phi \cdot \vec{S} &= \bar{q}_1 \vec{S}_1 - \bar{q}_2 \vec{S}_2 + \bar{q} \vec{S} \\ G_m V &= P_1 (\vec{v}_1 \vec{S}_1) - P_2 (\vec{v}_2 \vec{S}_2) + W\end{aligned}\tag{2.27}$$

Resultando:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (E_{cT} + E_{pT} + U_T) = & \\ & \left[ (E_{c1} + E_{p1} + U_1) \rho_1 Q_1 - (E_{c2} + E_{p2} + U_2) \rho_2 Q_2 \right] + \quad [2.28] \\ & + \left[ \vec{q}_1 \vec{S}_1 - \vec{q}_2 \vec{S}_2 + \vec{q} \vec{S} \right] + \\ & + \left[ P_1 (\vec{v}_1 \vec{S}_1) - P_2 (\vec{v}_2 \vec{S}_2) + W \right] \end{aligned}$$

## Simplificaciones:

- El transporte molecular a través de  $\mathbf{S}_1$  y  $\mathbf{S}_2$  es despreciable cuando hay movimiento del fluido.
- El flujo de calor a través de  $\mathbf{S}$  se representa por  $\mathbf{Q}$ .

Resulta la **ecuación macroscópica de conservación de la energía total**:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (E_{cT} + E_{pT} + U_T) = \\ \left[ (E_{c1} + E_{p1} + U_1) \rho_1 Q_1 - (E_{c2} + E_{p2} + U_2) \rho_2 Q_2 \right] + \quad [2.29] \\ + Q + \left[ P_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{S}_1) - P_2 (\vec{v}_2 \cdot \vec{S}_2) + W \right] \end{aligned}$$

## 2.4.3 Balance macroscópico de cantidad de movimiento

Aplicación de la ecuación [2.21] con los siguientes términos:

$$\Pi = \rho \vec{v}$$

$$\Pi_m V = \vec{p}_T$$

$$- \sum_S \phi \cdot \vec{S} = \vec{R}_1 \vec{S}_1 - \vec{R}_2 \vec{S}_2 - \vec{T} \vec{S} \quad [2.30]$$

$$G_m V = P_1 (\vec{v}_1 \vec{S}_1) - P_2 (\vec{v}_2 \vec{S}_2) + F + m_T g$$

Resultando:

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_T = \left[ \rho_1 \vec{v}_1 Q_1 - \rho_2 \vec{v}_2 Q_2 \right] + \left[ \vec{R}_1 \vec{S}_1 - \vec{R}_2 \vec{S}_2 - \vec{T} \vec{S} \right] + \left[ P_1 (\vec{v}_1 \vec{S}_1) - P_2 (\vec{v}_2 \vec{S}_2) + F + m_T g \right] \quad [2.31]$$

## Simplificaciones:

- El transporte molecular a través de  $\mathbf{S}_1$  y  $\mathbf{S}_2$  es despreciable cuando hay movimiento del fluido.

Resulta la **ecuación macroscópica de conservación de cantidad de movimiento** (balance de fuerzas), cuya aplicación es muy poco frecuente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{p}_T = & \\ & \left[ \rho_1 \vec{v}_1 Q_1 - \rho_2 \vec{v}_2 Q_2 \right] - \left[ \vec{T} \vec{S} \right] + \quad [2.32] \\ & \left[ P_1 \left( \vec{v}_1 \vec{S}_1 \right) - P_2 \left( \vec{v}_2 \vec{S}_2 \right) + F + m_T g \right] \end{aligned}$$