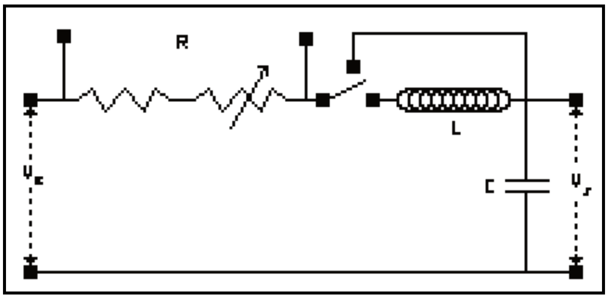
ESTUDIO FRECUENCIAL DE UN CIRCUITO R-L-C



Se estudiará el comportamiento en el dominio de la frecuencia del circuito R-L-C que se acompaña, cuyo esquema básico es el que se muestra en la Figura.

Obsérvese que se dispone de un conmutador a la entrada de la bobina que permite prescindir de ella y hacer el estudio complementario del circuito R-C.

La experiencia se llevará a cabo aplicando a la entrada del circuito una señal senoidal de frecuencia variable mediante un generador de ondas u oscilador (1 Hz - 1 MHz) y midiendo la señal de respuesta con un osciloscopio. Previamente será necesario, pues, estar familiarizado con estos dos aparatos, es decir, se ha de saber:

- Manejo del osciloscopio: escala de amplitudes, escala de frecuencias, calibrado de linea base, conmutación de canales, medida de tensiones, medida de longitudes de onda, medida de desfases.
- Funcionamiento del oscilador: escala de frecuencias, amplitud de salida (para su estudio puede usarse el osciloscopio).

* Obtener teóricamente la función de transferencia del circuito R-L-C en estudio.
* Determinar los parámetros dinámicos en función del valor de los respectivos componentes del circuito, indicando el orden del sistema.
* ¿Se podrían determinar los parámetros del circuito mediante un estudio dinámico en el dominio del tiempo? Razonar la respuesta suponiendo que los componentes tienen los siguientes órdenes de magnitud: $R \simeq 1\ k\Omega$, $L \simeq 1\ mH$, $C \simeq 1\ nF$.
* Transformar la función de transferencia obtenida, poniéndola en el dominio de la frecuencia. Obtener las expresiones para la amplitud y el desfase de la señal de salida en función de los parámetros dinámicos del sistema.
* Teniendo en cuenta el funcionamiento del generador de ondas y las escalas del osciloscopio, ¿qué medidas hay que hacer para obtener de la forma más

sencilla posible la amplitud y el desfase en función de la frecuencia? Diseñar la cabecera de una tabla que facilite el trabajo posterior.

* Con ayuda de un polímetro, regular el potenciómetro para obtener una resistencia total de 1 kΩ. Hacer la medida con el generador de ondas desconectado y tener la precaución de desconectar los terminales del polímetro al finalizar la medida. ¿Por qué esta precaución?.

* Operando el generador de ondas y el osciloscopio, y con ayuda de un diagrama de Bode, establecer el rango de frecuencias en el que será necesario ralizar las medidas (mínimo 2 décadas).

* Una vez establecido el intervalo de frecuencias de operación, realizar las medidas adecuadas, poniendo especial cuidado en las que se hacen alrededor del punto de ruptura. En caso necesario establecer el punto de ruptura partiendo del desfase.

* ¿Coinciden las frecuencias a las que se produce la amplitud máxima y la de ruptura? Justificar la respuesta teniendo en cuenta el tratamiento teórico realizado.

* Obtener los parámetros dinámicos y a partir de ellos, los valores de L y C. ¿Son fiables estos resultados o están sometidos a incertidumbre?.

* Regular el potenciómetro hasta obtener una resistencia total de 7 kΩ. ¿Habrá que operar en el mismo rango de frecuencia? Comprobarlo.

* ¿A qué frecuencia se produce el máximo de amplitud? Obtener los parámetros dinámicos y comprobarlo. Justificar teóricamente el fenómeno que se produce. Calcular L y C.

* Regular el potenciómetro hasta obtener una resistencia total de 9 kΩ. Establecer el rango de frecuencias de operación y obtener los parámetros dinámicos del sistema y los valores de los componentes del circuito.

* Comparar los valores obtenidos para L y C en los tres experimentos. Justificar la precisión de los mismos respecto a las medidas experimentales.

* Representar los datos obtenidos para los tres experimentos en un diagrama de Bode y un diagrama de Nyquist. Comparar en el diagrama de Bode los datos con la correspondiente aproximación asintótica.

* Utilizar el conmutador del circuito para prescindir de la bobina. Regular el potenciómetro hasta obtener la resistencia total equivalente al mismo punto de ruptura del circuito R-L-C. Realizar las medidas adecuadas para obtener la respuesta de frecuencia, representándola en los diagramas de Bode y Nyquist. Comparar la gráfica con las obtenidas anteriormente. ¿Se podría en este caso realizar el estudio dinámico del sistema en el dominio del tiempo?.

BIBLIOGRAFIA

LUYBEN, W.L.; "Process modeling, simulation, and control for chemical engineers", McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo (1973).

CLEMENT, J.M.; "Introducción al control e instrumentación", Alhambra, Madrid (1970).

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Balance de potencial (variables medibles):

$$V_e(t) = RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt} + V_s(t)$$

Por otro lado:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C\frac{dV_s(t)}{dt}$$

ya que:

$$C = \frac{Q}{V} \quad ; \quad Q = CV$$

Sustituyendo

$$V_e(t) = V_s(t) + RC\frac{dV_s(t)}{dt} + LC\frac{d^2V_s(t)}{dt}$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$V_e(s) = V_s(s) + RCsV_s(s) + LCs^2V_s(s)$$
$$= (LCs^2 + RCs + 1)V_s(s)$$

con lo que se obtiene la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

PARÁMETROS DEL SISTEMA

Comparando la función de transferencia obtenida para este sistema de segundo orden con la forma normalizada:

$$G(s) = \frac{K\omega_o^2}{s^2 + 2\gamma\omega_o s + \omega_o^2}$$

se obtienen los valores de los parámetros en función de los componentes del circuito:

$$K = 1$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\gamma = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

ESTUDIO EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Si los componentes del circuito tienen órdenes de magnitud tales que:

$$R \approx 1\ k\Omega$$

$$L \approx 1\ mH$$

$$C \approx 1\ nF$$

aplicando las ecuaciones anteriores se obtendría:

$$\omega_o \approx 10^6 \frac{rad}{s} \approx 160 \;kHz$$

$$\gamma \approx 0{,}5$$

El altísimo valor de la frecuencia haría imposible realizar las medidas en el dominio del tiempo. La gran rapidez de respuesta obliga, pues, a trabajar en el dominio de la frecuencia, que permite la operación del sistema en estado estacionario.

Obsérvese además que **γ** sólo depende de **R**, lo que permite amortiguar el sistema aumentando la resistencia. Es decir, se puede hacer un estudio completo (subamortiguado y sobreamortiguado) utilizando una resistencia variable o reostato.

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Sustituyendo en la función de transferencia la variable **s** por **jω**, se tiene:

$$G(j\omega) = \frac{K\omega_o^2}{\omega_o^2 - \omega^2 + j(2\gamma\omega_o\omega)^2}$$

$$= \frac{K\omega_o^2(\omega_o^2 - \omega^2) - j(2K\gamma\omega_o^3\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_o^2\omega^2}$$

de donde se puede calcular el módulo y el argumento del complejo:

$$A(\omega) = \frac{K\omega_o^2}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_o^2\omega^2}}$$

$$L(\omega) = 20\log A(\omega)$$

$$\psi(\omega) = arctg\left(\frac{-2\gamma\omega_o\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}\right)$$

DISEÑO DE LAS MEDIDAS

Al operar con el generador de ondas se observa que la amplitud de entrada varía con la frecuencia, por lo que, para facilitar la operación y no tener que ajustar para cada frecuencia la amplitud de entrada, se puede trabajar con amplitudes adimensionales, es decir, con el cociente entre la amplitud de salida y la de entrada. Con ello se logra el efecto equivalente a la medida de amplitudes de salida para una amplitud de entrada constante, y siguen siendo aplicables las mismas ecuaciones. Por su parte, el desfase se mide en la escala horizontal del osciloscopio con referencia a la onda completa.

Teniendo en cuenta que el diagrama de Bode es el más cómodo de utilizar, la cabecera de la tabla para llevar a cabo las medidas podría tener la siguiente estructura:

f (kHz)	Amplitud Salida	Amplitud Entrada	$\frac{AS}{AE}$	$L = 20\log\frac{AS}{AE}$	Unidades Desfase	Unidades Ciclo	$-\psi(^\circ) = \frac{UD}{UC}\cdot 360$

RANGO DE FRECUENCIAS DE OPERACIÓN

El intervalo de frecuencias de operación se puede determinar haciendo medidas de tanteo con ayuda de un diagrama de Bode. Como se puede deducir de las ecuaciones de amplitud, a frecuencias bajas (**ω -> 0**) se obtiene que **L = 0** y **ψ = 0** (asíntotas de baja frecuencia), y para frecuencias altas (asíntotas de alta frecuencia), al ser **ω ->** ∞ se tendrá:

$$L_{\omega \to \infty} = 40 \log \omega_o - 40 \log \omega$$

$$\psi_{\omega \to \infty} = -180°$$

Ambas asíntotas de amplitud se cortan para $\omega = \omega_o$ (frecuencia de corte o de ruptura).

Se puede obtener así con facilidad la posición aproximada de la frecuencia de ruptura, variando la frecuencia del generador hasta que ambas ondas, que deben estar solapadas para frecuencias bajas (**A = 1**), comienzan a separarse. El rango de medidas establecido de esta forma (bastan dos ciclos logarítmicos de la frecuencia) será el mismo para todos los experimentos, ya que ω_o sólo depende de **L** y de **C**, y éstas permanecen siempre constantes.

AJUSTE DE LA RESISTENCIA

Cuando se hace el ajuste de la resistencia utilizando un polímetro (ohmios), hay que tener la precaución de desconectarlo al finalizar la operación, ya que en caso contrario su resistencia interna influiría en las medidas, proporcionando valores erróneos.

MEDIDA DEL PUNTO DE RUPTURA

Al realizar las medidas de amplitud y desfase en función de la frecuencia, se observa una cierta estabilidad de las medidas en los alrededores del punto de ruptura. Como se ha visto anteriormente, este punto es el corte de las dos asíntotas de amplitud en el diagrama de Bode y la frecuencia a la que se produce coincide con la frecuencia natural del sistema, ω_o. En este punto las magnitudes teóricas valen:

$$A(\omega_o) = \frac{\omega_o}{\sqrt{4\gamma^2\omega_o^2}} = \frac{1}{2\gamma}$$

$$\psi(\omega_o) = arctg\left(-\frac{2\gamma\omega_o^2}{0}\right) = -90°$$

es decir, se puede determinar la frecuencia de ruptura variando la frecuencia de entrada hasta lograr un desfase de **-90°**. Por otro lado, una vez fijada esa frecuencia, la amplitud resultante permite determinar el coeficiente de amortiguamiento, γ.

FRECUENCIA DE RUPTURA Y FRECUENCIA DE LA AMPLITUD MÁXIMA

La frecuencia de ruptura no tiene por qué coincidir con la frecuencia a la que se produce la amplitud máxima. En efecto, derivando la expresión de la amplitud e igualándola a cero se obtiene:

$$\frac{dA}{d\omega} = \frac{-K\omega_o\left[-2\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)2\omega + 8\gamma^2\omega_o^2\omega\right]}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_o^2\omega^2} = 0$$

de donde:

$$\omega_{A\,máx} = \omega_o\sqrt{1 - 2\gamma^2}$$

pudiéndose calcular el valor de la amplitud máxima sustituyendo esta expresión en la de la amplitud:

$$A_{máx} = \frac{1}{2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}}$$

Obsérvese que ambas amplitudes sólo coinciden para **γ = 0**.

Si se sustituye la frecuencia del máximo de amplitud en la ecuación del desfase se obtendría:

$$\psi_{A\,máx} = arctg\left(-\frac{\sqrt{1-2\gamma^2}}{\gamma}\right)$$

expresión que también permitiría calcular **γ**, pero menos fácilmente que a partir de la amplitud de la frecuencia de ruptura.

OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL SISTEMA

Como muestran las expresiones anteriores, $\boldsymbol{\omega_o}$ se obtendrá como la frecuencia que produce un desfase de **-90°**, mientras que **γ** se obtiene a partir de la amplitud que produce esta frecuencia. Una vez determinados estos parámetros, las constantes físicas del sistema se calculan mediante las expresiones:

$$L = \frac{R}{2\gamma\omega_o}$$

$$C = \frac{2\gamma}{R\omega_o}$$

Cuando **γ** es muy bajo, la frecuencia de ruptura y la de máxima amplitud están muy próximas, lo que induce inestabilidades en las medidas experimentales, dando lugar a errores den la determinación de $\boldsymbol{\omega_o}$ y de **γ** y, por tanto, en la estimación de **L** y **C**.

AUMENTO DE LA RESISTENCIA

Al aumentar la resistencia se aumenta el factor de amortiguamiento. Como **R** no influye en ω_o, el rango de frecuencias de operación será el mismo y también el punto de ruptura. Sin embargo, el máximo de amplitud será diferente, ya que se produce a una frecuencia:

$$\omega_{A\,máx} = \omega_o \sqrt{1 - 2\gamma^2}$$

expresión en la que influye **γ** y, por tanto, **R**.

También será diferente el valor del máximo de amplitud, ya que en él también influye **γ**:

$$A_{máx} = \frac{1}{2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2}}$$

Es más, a medida que aumenta **γ** (o aumenta la resistencia), el máximo va decreciendo. Incluso llega a desaparecer completamente ya que, si se observa la ecuación de la frecuencia del máximo, éste sólo existiría para:

$$2\gamma^2 < 1$$

o bien:

$$\gamma < \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707$$

ya que a valores superiores la raíz se haría imaginaria y dejaría de existir la frecuencia del máximo y, por tanto, el máximo. Sin embargo, a ese valor de **γ** la amplitud tendría un valor, si bien no sería un máximo.

COMPARACIÓN DE LOS VALORES DE L Y C

Si se comparan los valores obtenidos de **L** y **C** para distintos valores de **R**, se observa que son tanto más iguales cuanto mayor es **R**. Esto es debido a que, a medida que se va amortiguando el sistema, las medidas se vuelven más estables, con lo que los valores de **L** y **C** son más repetitivos y, por tanto, más fiables.

REPRESENTACIONES GRÁFICAS

Las representaciones gráficas de los datos experimentales en los diagramas de Nyquist y Bode muestran la forma típica de los sistemas de segundo orden. Como era de esperar, la aproximación asintótica del diagrama de Bode es tanto más real, cuanto mayor sea el valor de **γ**.

SISTEMA DE PRIMER ORDEN

Si se prescinde de la bobina, el sistema se transforma en un circuito RC, sistema de primer orden de función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{\mathrm{T}s + 1}$$

y, en el dominio de la frecuencia:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\mathrm{T}\omega j + 1} = \frac{1 - j\mathrm{T}\omega}{1 + \mathrm{T}^2\omega^2}$$

La amplitud y el desfase serán ahora:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$$

$$\psi(\omega) = arctg\,(-T\omega)$$

y las asíntotas del diagrama de Bode:

$$L_{\omega\to 0} = 0 \qquad\qquad \psi_{\omega\to 0} = 0°$$

$$L_{\omega\to\infty} = -20\log T - 20\log\omega \qquad\qquad \psi_{\omega\to\infty} = -90°$$

produciéndose el corte de las asíntotas de amplitud (frecuencia de ruptura) en:

$$\omega = \frac{1}{T}$$

dando los valores:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\psi = -45°$$

Como **C** es conocido, se puede regular **R** hasta obtener un valor que permita obtener una frecuencia de ruptura igual a la del circuito RLC.

La representación de los datos experimentales en diagramas de Nyquist y Bode muestra las formas típicas de los sistemas de primer orden.

Obsérvese que en este caso la constante de tiempo (inversa de la frecuencia de ruptura) es del orden de los microsegundos, lo que hace imposible el estudio de este sistema en el dominio del tiempo.