ESTUDIO DINÁMICO DE UN MANÓMETRO

Como es sabido por la experiencia, la respuesta de un manómetro a un cambio de presión no es instantánea, sino que necesita un tiempo de estabilización, durante el cual la altura del líquido manométrico varía con el tiempo.

Según se puede demostrar teóricamente, el manómetro en U se comporta dinámicamente como un sistema de segundo orden de retraso, es decir, tiene una función de transferencia del tipo:

$$G(s) = \frac{K\,\omega_o^2}{s^2 + 2\,\gamma\,\omega_o\,s + \omega_o^2}$$

y por su simplicidad se presta a un estudio experimental detallado.

* Obtener la función de transferencia del manómetro en función de las variables:

h: altura del fluido manométrico (m)

h_i: presión aplicada (m de altura manométrica)

L: longitud de la columna manométrica (m)

ρ: densidad del fluido manométrico (kg/m^3)

σ: coeficiente de rozamiento ($kg/m^2.s$)

g: aceleración de la gravedad (m/s^2)

* Identificar γ, ω_o y K en función de las variables indicadas.

Por razones experimentales es más fácil estudiar el sistema si inicialmente las dos ramas del manómetro están a distinta altura (estado que se conseguirá aplicando inicialmente presión al manómetro) y se observa cómo se alcanza el nuevo estado estacionario en que ambas ramas están a la misma altura (estado que se conseguirá abriendo a la atmósfera la rama que estaba sometida a presión).

* Indicar qué tipo de función de excitación supone la operación indicada y cuál es su expresión matemática.

* Háganse unas pruebas de tanteo con el manómetro para determinar si el sistema se comporta como sobreamortiguado o subamortiguado.

* En función del comportamiento del sistema, calcular la expresión de la respuesta del mismo utilizando variables medibles experimentalmente. ¿Cuáles son éstas?

* Determinar las expresiones que permitan calcular experimentalmente el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia del sistema.

* A la vista de estas expresiones, determinar las condiciones experimentales más favorables para calcular cada uno de los parámetros.

* Una vez fijadas estas condiciones óptimas, tómense los datos experimentales necesarios para el cálculo de γ y ω_o.

* ¿Es ideal el sistema? Justificar la respuesta intentando encontrar una justificación física. ¿Son válidos los datos obtenidos en estas condiciones para calcular los parámetros? Discutir este punto teniendo en cuenta las expresiones de definición de los parámetros.

* ¿Qué efecto tendrá sobre el sistema el cierre parcial de la válvula de la base del manómetro?

* En función del nuevo comportamiento del sistema, calcular la expresión matemática de la respuesta del mismo.

* Determinar, en este caso, las expresiones que permitan calcular experimentalmente los parámetros ω_o y γ.

* Determinar el período de oscilación del sistema en el caso de que éste exista.

BIBLIOGRAFIA

CLEMENT, J.M.; "Introducción al control e instrumentación", Alhambra, Madrid (1970).

HARRIOT, P.; "Process control", Robert E. Krieger, Malabar, Florida (1983).

ANDRES, E.; "Regulación automática I", E.T.S. Ingenieros Industriales, U.P. de Madrid, Madrid (1986).

KUO, B.J.; "Automatic control systems", 4 ed., Prentice-Hall, Englewood New Jersey (1982).

ESTUDIO DINÁMICO DE UN MANÓMETRO
(APÉNDICE 1)

Por tratarse de un sistema subamortiguado, se produce una serie de máximos y mínimos (respuesta oscilatoria).

* ¿Qué alturas manométricas y qué tiempos se podrán medir en este sistema?
* Calcular la expresión general de los tiempos (t_p) a que se producen los n máximos de la función (picos de sobreoscilación).
* Hágase el cambio de variable:

$$\alpha = \omega_o \sqrt{1 - \gamma^2}\, t_p + \lambda$$

* Calcúlese la expresión de tg α, recordando que:

$$tg\lambda = \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{\gamma}$$

y que, para cualquier ángulo θ:

$$tg\theta = tg(\theta + n\pi) \qquad [para\ \ n\ \ impar]$$

* Una vez obtenida la expresión de t_p en función de ω_o, γ y n, hallar la expresión de la altura manométrica (h_p) para cada tiempo t_p, recordando que, para cualquier ángulo θ:

$$sen(\theta + n\pi) = - sen\theta \qquad [para\ \ n\ \ impar]$$

ESTUDIO DINÁMICO DE UN MANÓMETRO
(APÉNDICE 2)

Para facilitar el cálculo, se considerará que este sistema de segundo orden se puede representar como dos sistemas de primer orden en serie, con sendas constantes de tiempo ficticias, τ_1 y τ_2. Con ello, la función de transferencia quedará de la forma:

$$G(s) = \frac{K\,\omega_o^2}{s^2 + 2\,\gamma\,\omega_o\,s + \omega_o^2} = \frac{K}{(\tau_1 + 1)(\tau_2 + 1)}$$

* Obtener las expresiones matemáticas de τy τen función de γ y ω_o.
* Obtener la respuesta del sistema en función de las constantes de tiempo ficticias.
* Simplificar las expresiones considerando que $\gamma >> 1$.
* ¿Cuál es la justificación física de $\gamma >> 1$?
* Demostrar que si $\tau_1 >> \tau_2$, se verifica que $\gamma >> 1$.
* Simplificar la expresión de la respuesta del sistema en función de esta hipótesis.
* En función de la ecuación obtenida, diseñar un método experimental para obtener ω_o y γ.

OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Balance de fuerzas:

$$F_t = F_p - (F_g + F_r)$$

donde:

F_t: fuerza total

F_p: fuerza de presión aplicada

F_g: peso (se opone a la presión)

F_r: fuerza de rozamiento (se opone a la presión)

Considerando que el origen de alturas está en la posición de equilibrio y que la diferencia de alturas entre las dos ramas es **2 h**, las expresiones de las distintas fuerzas serán:

$$F_t = Ma = [AL\rho]\left[\frac{d^2h}{dt^2}\right]$$

$$F_p = PA = [\rho g(2h_i)][A] = 2\rho gAh_i$$

$$F_g = mg = [A(2h)\rho][g] = 2\rho gAh$$

$$F_r = \sigma Av = \sigma A\frac{dh}{dt}$$

Sustituyendo y simplificando:

$$L\rho \frac{d^2h(t)}{dt^2} = 2\rho g h_i(t) - 2\rho g h(t) - \sigma \frac{dh(t)}{dt}$$

Aplicando la transformada de Laplace y reordenando:

$$\left(L\rho s^2 + \sigma s + 2\rho g\right) h(s) = 2\rho g h_i(s)$$

Definiendo la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{h(s)}{h_i(s)} = \frac{1}{\frac{L}{2g}s^2 + \frac{\sigma}{2\rho g}s + 1} = \frac{\frac{2g}{L}}{s^2 + \frac{\sigma}{\rho L}s + \frac{2g}{L}}$$

<u>IDENTIFICACIÓN DE LAS CONSTANTES</u>

Si se compara la función de transferencia obtenida con la forma normalizada de la misma para sistemas de segundo orden, se tendrá:

$$K = 1$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

$$\gamma = \frac{\sigma}{2\rho} \sqrt{\frac{1}{2gL}}$$

A efectos de identificar el coeficiente de rozamiento, σ, con las constantes físicas del sistema, se supone que el movimiento del fluido es laminar por el interior del tubo, pudiéndose aplicar la ecuación de Hagen-Poiseuille, que permite expresar la caída de presión en función de la velocidad media del fluido de la forma:

$$P = \frac{32 \mu L}{D^2} v$$

con lo cual, la fuerza de rozamiento tendrá la expresión:

$$F_r = PA = \frac{32 \mu L}{D^2} A v$$

lo que permite identificar el coeficiente de rozamiento, σ, de la forma:

$$\sigma = \frac{32 \mu L}{D^2}$$

Se puede así poner el coeficiente de amortiguamiento, γ como:

$$\gamma = \frac{8 \mu L}{\rho g D^2} \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

A efectos de cálculo se considerarán los valores para el mercurio:

$$\mu = 1{,}6 \; cp = 1{,}6 \cdot 10^{-3} \; \frac{kg}{m \; s}$$

$$\rho = 13{,}5 \; \frac{g}{cm^3} = 13.500 \; \frac{kg}{m^3}$$

utilizando un tubo de **5,5 mm** de diámetro interno y más de **1 m** de longitud total.

Si se observan los valores de $\boldsymbol{\omega_o}$ y $\boldsymbol{\gamma}$, se puede deducir los siguiente:

* $\boldsymbol{\gamma}$ debe ser bajo para tener oscilaciones (sistema subamortiguado); se logra con $\boldsymbol{\rho}$ alta (mercurio), $\boldsymbol{\mu}$ baja (mercurio) y **D** alta (impuesta por el diseño.

* $\boldsymbol{\omega_o}$ debe ser baja para tener muchas oscilaciones y facilitar la medida experimental; se logra haciendo **L** alta.

* Al depender $\boldsymbol{\gamma}$ de **D**, se puede conseguir $\boldsymbol{\gamma > 1}$ introduciendo un estrechamiento en la conducción (válvula).

FUNCIÓN DE EXCITACIÓN

Al aplicar una presión al manómetro y liberarla instantáneamente, se está aplicando un escalón de altura manométrica, cuya expresión matemática dependerá del origen de coordenadas que se tome para las medidas (rama izquierda o derecha y posición de carga o de equilibrio). En principio se considerará de amplitud **A**.

TANTEO DEL MANÓMETRO

Al tantear el manómetro con la válvula completamente abierta, se observa que el mercurio oscila, lo cual demuestra que el sistema es subamortiguado.

ECUACIÓN DE RESPUESTA

La ecuación de respuesta de un sistema subamortiguado excitado con un escalón tiene la forma:

$$h(t) = A\left(1 - \frac{e^{-\gamma\omega_o t}}{\sqrt{1 - \gamma^2}}\, sen\, \alpha\right)$$

siendo:

$$\alpha = \omega_o \sqrt{1 - \gamma^2}\, t + \lambda$$

$$\lambda = arctg \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{\gamma} = \arccos \gamma$$

Debido a que se producen oscilaciones, no se podrá obtener experimentalmente una curva **h - t**, por lo que sólo podrán medirse los máximos (o mínimos) de oscilación. Para ello habrá que obtener la ecuación de los picos de oscilación, que serán las que se puedan aplicar para obtener experimentalmente los parámetros del sistema, $\boldsymbol{\omega_o}$ y $\boldsymbol{\gamma}$.

Derivando la ecuación de respuesta e igualándola a cero para obtener los máximos (mínimos) de oscilación:

$$\frac{\gamma \omega_o}{\sqrt{1 - \gamma^2}} e^{-\gamma \omega_o t_p} sen\, \alpha - \frac{e^{-\gamma \omega_o t_p}}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \omega_o \sqrt{1 - \gamma^2} \cos \alpha = 0$$

donde $\mathbf{t_p}$ es el tiempo al que se produce el pico de sobreoscilación.

La expresión anterior puede simplificarse a:

$$\frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}} sen\, \alpha = \cos \alpha$$

o bien:

$$tg\, \alpha = \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{\gamma}$$

Comparando esta expresión con la de definición del desfase, $\boldsymbol{\lambda}$, se concluye que:

$$tg\ \alpha = tg\ \lambda$$

o bien, de forma general:

$$tg\ \alpha = tg(\lambda + n\pi)$$

o, lo que es lo mismo:

$$\alpha = \lambda + n\pi$$

con lo que, a partir de la definición de **α** se obtiene que:

$$t_p = \frac{n\pi}{\omega_o \sqrt{1 - \gamma^2}} \qquad (para\ todo\ n)$$

Sustituyendo $\mathbf{t_p}$ en la ecuación de respuesta, se obtiene la altura del pico, $\mathbf{h_p}$:

$$h_p = A\left[1 - \frac{e^{-\frac{\gamma n\pi}{\sqrt{1-\gamma^2}}}}{\sqrt{1 - \gamma^2}}\ sen\ (n\pi + \lambda)\right]$$

Si **n** es impar, se tendría que:

$$sen\ (n\pi + \lambda) = -\ sen\ \lambda$$

con lo cual, y considerando la definición de **λ**, se podría llegar a:

$$h_p = A\left(1 + e^{-\frac{\gamma n\pi}{\sqrt{1-\gamma^2}}}\right) \qquad (para\ n\ impar)$$

o bien, para **n** par, a una expresión idéntica pero con un signo negativo afectando al segundo sumando.

A partir de esta expresión podría obtenerse el coeficiente de amortiguamiento, **γ**, midiendo las alturas de los sucesivos picos de sobreoscilación. Conocido **γ**, y con los correspondientes tiempos de pico, podría calcularse la frecuencia natural del sistema, $\boldsymbol{\omega_o}$.

EXPRESIONES PARA EL CALCULO EXPERIMENTAL

En las ecuaciones anteriores, la altura viene expresada como variable de perturbación, por lo que hay que transformarla en función de variables medibles, es decir, instantáneas. Como ya se ha indicado anteriormente, el cambio de variables dependerá del origen de coordenadas que se tome para medirlas.

Se elige aquí como origen de coordenadas la posición de equilibrio de ambas ramas del manómetro, tomándose las medidas sobre la rama izquierda. Asimismo será esta rama la sometida a presión.

En estas condiciones, la altura inicial será $\boldsymbol{-h_o}$, con lo cual la amplitud del escalón tendrá el valor:

$$A = h_{final} - h_{inicial} = 0 - (-h_o) = h_o$$

y el valor instantáneo de la altura de los picos de **n** impar será:

$$H_p = -h_o + h_o\left(1 + e^{-\frac{\gamma n\pi}{\sqrt{1-\gamma^2}}}\right)$$

o, lo que es lo mismo:

$$H_p = h_o \, e^{-\frac{\gamma n \pi}{\sqrt{1-\gamma^2}}}$$

de donde puede calcularse el coeficiente de amortiguamiento, **γ**, de la forma:

$$\gamma = \frac{\ln \frac{h_o}{H_p}}{\sqrt{n^2\pi^2 + \left(\ln \frac{h_o}{H_p}\right)^2}}$$

expresión que junto a:

$$\omega_o = \frac{n\pi}{\sqrt{1-\gamma^2}\; t_p}$$

permite obtener los parámetros del sistema.

Una vez conocida la frecuencia natural del sistema, la frecuencia real se podría calcular mediante la expresión:

$$\omega_d = \omega_o \sqrt{1-\gamma^2}$$

siendo el período de oscilación:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

Obsérvese que se podrían simplificar las ecuaciones si se tomasen las medidas en dos picos consecutivos, **n** y **n + 2**. En estas condiciones, las expresiones anteriores se convierten en:

$$\frac{H_{p2}}{H_{p1}} = e^{-\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}}$$

$$t_{p2} - t_{p1} = \frac{2\pi}{\omega_o\sqrt{1-\gamma^2}}$$

ecuaciones independientes del pico medido y del valor inicial de la altura.

CONDICIONES EXPERIMENTALES ÓPTIMAS

A la vista de las ecuaciones anteriores, el error en la altura es menor en los primeros picos, mientras que el error en el tiempo es menor en los últimos picos. Si es posible, conviene tomar medidas en todos los picos y ver cómo afectan los valores obtenidos al resultado final.

IDEALIDAD DEL SISTEMA

Para analizar el comportamiento del sistema respecto a la idealidad, será necesario calcular los valores teóricos de los parámetros obtenidos mediante las expresiones:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

$$\gamma = \frac{8\mu L}{\rho g D^2}\sqrt{\frac{2g}{L}}$$

Mientras que los valores de ω_o son del mismo orden de magnitud, los valores de γ experimentales son unas diez veces superiores al valor teórico. Se puede observar además que el valor de γ obtenido aumenta con **n**, cuando debiera permanecer constante. Ello hace pensar que el sistema no es ideal y que no es aplicable la ecuación de Hagen-Poiseuille, ya que parece que se produce un rozamiento del fluido con las paredes del tupo mucho más alto que el previsto teóricamente.

Las expresiones para calcular los parámetros de forma experimental no dejarían de ser válidos, pero no lo sería la aproximación teórica utilizada para calcular el coeficiente de rozamiento.

CIERRE PARCIAL DE LA VÁLVULA

Al ir cerrando la válvula de la base del manómetro, las oscilaciones se vuelven cada vez más amortiguadas, hasta que dejan de percibirse oscilaciones. Ello es debido a que se está aumentando considerablemente el coeficiente de rozamiento o, lo que es lo mismo, se está forzando el sistema hacia $\gamma > 1$, haciéndolo sobreamortiguado.

RESPUESTA DEL SISTEMA CON LA VÁLVULA PARCIALMENTE CERRADA

La respuesta de un sistema de segundo orden sobreamortiguado tiene la siguiente forma:

$$h(t) = A\left[1 + \frac{\omega_o}{2\sqrt{\gamma^2 - 1}}\left(\frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2}\right)\right]$$

siendo s_1 y s_2 las dos raíces de la ecuación característica, es decir:

$$s_1 = -\gamma\omega_o + \omega_o\sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$s_2 = -\gamma\omega_o - \omega_o\sqrt{\gamma^2 - 1}$$

Para facilitar el cálculo se considerará que este sistema de segundo orden se puede representar de forma equivalente por dos sistemas de primer orden en serie, es decir:

$$G(s) = \frac{K\omega_o^2}{s^2 + 2\gamma\omega_o s + \omega_o^2} = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{\dfrac{K}{T_1 T_2}}{s^2 + \dfrac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}s + \dfrac{1}{T_1 T_2}}$$

identificando los parámetros se obtiene:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}}$$

$$\gamma = \frac{T_1 + T_2}{2}\sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}}$$

o bien:

$$T_1 T_2 = \frac{1}{\omega_o^2}$$

$$T_1 + T_2 = \frac{2\gamma}{\omega_o}$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se puede obtener τ_1 y τ_2 en función de γ y de ω_o, de la forma:

$$\tau_2 = \frac{\gamma}{\omega_o} \pm \frac{1}{\omega_o}\sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{\gamma\omega_o \pm \omega_o\sqrt{\gamma^2 - 1}}$$

Si se cierra la válvula de la base del manómetro lo suficiente, se puede conseguir que γ sea mucho mayor que 1, con lo que las ecuaciones anteriores se simplifican a:

$$\tau_2 \approx \frac{2\gamma}{\omega_o}$$

$$\tau_1 \approx \frac{1}{2\gamma\omega_o}$$

Obsérvese que al ser $\gamma >> 1$, además sucede que:

$$\tau_2 >> \tau_1$$

En estas condiciones, las raíces de la ecuación característica en función de las constantes de tiempo se simplifican a:

$$s_1 \approx -\frac{1}{T_1}$$

$$s_2 \approx -\frac{1}{T_2}$$

y, por tanto, sustituyendo estos valores en la ecuación de respuesta:

$$h(t) = A\left[1 + \frac{2\sqrt{T_1T_2}}{2\sqrt{T_1T_2}\,(T_1 - T_2)}\left(-T_1\, e^{-\frac{t}{T_1}} + T_2\, e^{-\frac{t}{T_2}}\right)\right]$$

$$= A\left(1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1}\, e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1}\, e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$$

Si se vuelve a aplicar a esta ecuación la aproximación relativa a las constantes de tiempo, se tendrá:

$$h(t) = A\left(1 - e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$$

respuesta de un sistema de primer orden, a partir de cuya curva **h - t** se puede obtener **T_2.**

En efecto, transformando la variable de perturbación en instantánea en las mismas condiciones que para el sistema subamortiguado, se tendrá:

$$h = -h_o + h_o\left(1 - e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$$

o, lo que es lo mismo:

$$h = h_o \, e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

o bien, linealizada:

$$\ln \frac{h_o}{h} = \frac{1}{\tau_2} \, t$$

DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL SISTEMA SOBREAMORTIGUADO

A partir de la ecuación anterior se puede obtener $\boldsymbol{\tau_2}$. Sin embargo, sólo se tiene una ecuación para dos incógnitas, $\boldsymbol{\omega_o}$ y $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\tau_2 = \frac{2\gamma}{\omega_o}$$

No obstante, al ser $\boldsymbol{\omega_o}$ un parámetro intrínseco del sistema, independiente de $\boldsymbol{\gamma}$, se puede utilizar el valor de $\boldsymbol{\omega_o}$ determinado para $\boldsymbol{\gamma < 1}$, con lo cual $\boldsymbol{\gamma}$ tendrá el valor, en función de parámetros conocidos:

$$\gamma = \frac{2\tau_2}{\omega_o}$$

Obsérvese que una vez obtenido $\boldsymbol{\gamma}$, hay que comprobar que, efectivamente $\boldsymbol{\gamma >> 1}$, ya que esta hipótesis ha sido la base de todo el método de cálculo.

PERÍODO DE OSCILACIÓN DEL SISTEMA SOBREAMORTIGUADO

Si el sistema está sobreamortiguado, no oscilará, por lo que no existe período de oscilación.