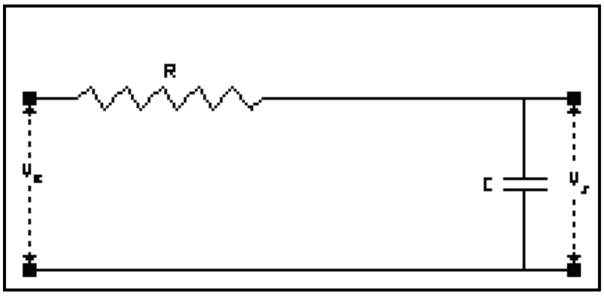
ESTUDIO DINÁMICO DE UN CIRCUITO R-C



Se estudiará el comportamiento dinámico del circuito R-C que se acompaña, cuyo esquema básico es el mostrado en la Figura. El resto del circuito corresponde a un amplificador operacional dispuesto como seguidor de tensión, cuya única función es impedir corrientes eléctricas a través del instrumento de medida, y no afecta a los resultados.

* Obtener la función de transferencia del sistema.
* Indicar el orden del sistema.
* ¿Qué relación tiene este circuito con las propiedades que se manejan generalmente en Ingeniería Química (cantidad de movimiento, energía, materia)?
* Si se conecta al circuito la pila de diferencia de potencial A, ¿qué tipo de función de excitación se está aplicando?
* Con los datos anteriores, obtener la función de respuesta $V_s(t)$.
* La función obtenida tiene varias constantes. Indicar cuáles son las medidas que es necesario realizar y explicar los tratamientos alternativos que se les puede dar a los datos experimentales para determinar dichas constantes.
* Elegir uno de los dos sistemas de medida disponibles:
    - Polímetro y cronómetro
    - Registrador
* Conectar adecuadamente el dispositivo de medida, conectar la pila al circuito y determinar las citadas constantes.
* Calcular la capacidad del condensador.
* ¿Cuál es el valor de la tensión de salida antes de iniciar el experimento? ¿Qué significa este valor, supuesto que sea distinto de cero? ¿Qué habría que hacer si se deseara comenzar el experimento con una tensión de salida nula? ¿Que diferencia habría en realizar el experimento partiendo de una tensión de salida

nula o partiendo de una no nula?

* Si se realiza el experimento partiendo de un valor de la tensión de salida próximo al valor nominal de la pila y cortocircuitando los terminales de la señal de entrada, ¿la dinámica del sistema sería la misma? ¿Cuáles serían sus parámetros? ¿Coincidirían con los obtenidos de la forma indicada anteriormente?

* El condensador no es completamente ideal. ¿Cómo se manifiesta este hecho? ¿Qué precauciones habría que tomar para que esta desviación de la idealidad afectase mínimamente a la determinación de las constantes del sistema?

BIBLIOGRAFIA

COUGHANOWR, D.R. y KOPPEL, L.B.; "Process systems analysis and control", McGraw-Hill Kogakusha, Tokio (1965).

PERRY, R.H. y CHILTON, C.H.; "Manual del ingeniero químico", 5 ed., McGraw-Hill, México (1982).

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DEL SISTEMA

Balance de potencial (variables medidas):

$$V_e(t) = RI(t) + V_s(t)$$

Por otro lado:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C\frac{dV_s(t)}{dt}$$

ya que

$$C = \frac{Q}{V} \quad ; \quad Q = CV$$

Sustituyendo:

$$V_e(t) = V_s(t) + RC\frac{dV_s(t)}{dt}$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} V_e(s) &= V_s(s) + RCs\,V_s(s) \\ &= (1 + RCs)\;V_s(s) \end{aligned}$$

con lo que se obtiene la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

ORDEN DEL SISTEMA

El sistema es de primer orden, ya que se obtiene una función de transferencia del tipo:

$$G(s) = \frac{K}{\mathrm{T}s + 1}$$

siendo en este caso:

$$K = 1$$

$$\mathrm{T} = RC$$

RELACIÓN CON LAS PROPIEDADES DE TRANSPORTE

Teniendo en cuenta que:

$$R = \frac{V}{I}$$

$$C = \frac{Q}{V}$$

resulta:

$$RC = \frac{Q}{I} = \frac{Q}{\frac{dQ}{dt}}$$

es decir, la constante de tiempo es el cociente entre la carga y la intensidad, o generalizando, entre la **magnitud** y el **flujo de esa magnitud**, o bien matemáticamente, el cociente entre la magnitud y su derivada.

Bajo este punto de vista puede construirse la siguiente tabla:

MAGNITUD	FLUJO DE MAGNITUD
Carga Q [A.s]	Intensidad I [A]
Cantidad de movimiento [kg.m.s^{-1}]	Fuerza [kg.m.s^{-2}]
Energía [kg.m^{2}.s^{-2}]	Potencia [kg.m^{2}.s^{-3}]
Materia [kg]	Caudal másico [kg.s^{-1}]

CONEXIÓN DE UNA PILA AL CIRCUITO

Al conectar al circuito una pila de potencial **A**, **V_e(t)** pasa instantáneamente de **0** a **A**, con lo cual se está aplicando un escalón de potencial, cuya transformada de Laplace será:

$$V_e(s) = \frac{A}{s}$$

OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN DE RESPUESTA

Sustituyendo en

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

el escalón de potencial, se obtiene:

$$V_s(s) = \frac{A}{s(\tau s + 1)}$$

Las constantes son:

A: potencial real de la pila

τ: constante de tiempo, R.C

MÉTODOS PARA LA DETERMINACIÓN DE LAS CONSTANTES

El potencial de la pila, **A**, se determina midiendo con un polímetro (voltios) sus bornes.

La resistencia, **R**, se determina midiendo con un polímetro (ohmios) en sus extremos.

Para la determinación de la capacidad del condensador, **C**, será necesario medir la constante de tiempo del sistema y, conocida la resistencia, calcular la capacidad.

Para obtener **τ** hay que pasar de nuevo al dominio del tiempo la variable $\mathbf{V_s(s)}$. Aplicando la transformada inversa de Laplace se obtiene:

$$V_s(t) = A\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Esta ecuación permite obtener **τ**, conocida **A**, haciendo medidas de $\mathbf{V_s}$ con el tiempo y aplicando posteriormente algún método matemático. Se consideran dos alternativas:

Cálculo a **t = τ**

Cálculo de la pendiente de la ecuación de respuesta linealizada

En ambos casos hay que tener en cuenta que los valores de $\mathbf{V_s(t)}$ de las ecuaciones anteriores son **variables de perturbación**, es decir, considerando $\mathbf{V_e(_{t=0}) = 0}$.

DETERMINACIÓN DE τ EN CARGA

Si la tensión de salida antes de iniciar el experimento no es nula, significará que el condensador posee carga. Para descargarlo totalmente habrá que cortocircuitar sus bornes.

De cualquier forma, no habría ninguna diferencia experimental partiendo de una tensión nula o de una distinta de cero. En el primer caso, las ecuaciones se simplifica-rían.

A continuación se desarrollan las ecuaciones considerando variables instantáneas para aplicar los métodos de cálculo indicados anteriormente.

Si se denomina $\mathbf{V_{so}}$ a la tensión inicial de salida, se tendría, en variables instantáneas:

$$V_s = V_{so} + (A - V_{so})\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Obsérvese que el escalón aplicado no sería de magnitud **A**, sino de magnitud $\mathbf{(A - V_{so})}$.

Reordenando:

$$V_s = V_{so} e^{-\frac{t}{\tau}} + A\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Para **t = τ** se obtendrá:

$$V_s(\tau) = 0{,}37\, V_{so} + 0{,}63 A$$

es decir, haciendo la curva $\mathbf{V_s}$ **- t** y leyendo el tiempo al que se obtiene el valor de $\mathbf{V_s}$ indicado, se obtiene la constante de tiempo, **τ.**

Igual se podría hacer para **t = 3τ**:

$$V_s(3\tau) = 0{,}05\, V_{so} + 0{,}95 A$$

obteniéndose en esta caso mayor error por ser la curva más plana.

Como método alternativo de determinar **τ** se podría linealizar la ecuación de respuesta.

Operando en ella:

$$1 - \frac{V_s - V_{so}}{A - V_{so}} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

o bien:

$$\ln \frac{A - V_s}{A - V_{so}} = -\frac{1}{\tau} t$$

Por lo que una representación semilogarítmica del primer miembro frente al tiempo daría una recta de cuya pendiente se podría obtener la constante de tiempo.

DETERMINACIÓN DE τ EN DESCARGA

Si se realiza el experimento partiendo de un valor de la tensión de salida próximo al de la pila y cortocircuitando los terminales de la señal de entrada, se estaría realizando un proceso de descarga del condensador.

La dinámica del sistema sería la misma, así como sus parámetros, cuyos valores deben coincidir con los obtenidos en el proceso de carga.

No obstante, las ecuaciones de cálculo son diferentes, ya que ahora el escalón tiene una amplitud **$-V_{so}$** (el valor final de descarga es cero), con lo cual:

$$V_s = V_{so} - V_{so}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

o bien, simplificando:

$$V_s = V_{so}\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Así, para **t = τ**:

$$V_s(\tau) = 0{,}37\, V_{so}$$

y para **t = 3τ**:

$$V_s(3\tau) = 0{,}05\, V_{so}$$

En estas condiciones, la ecuación linealizada será:

$$\ln \frac{V_s}{V_{so}} = -\frac{1}{\tau}\, t$$

de cuya pendiente se determinaría asimismo la constante de tiempo.

NO IDEALIDAD DEL CONDENSADOR

La no idealidad del condensador se manifiesta en la discrepancia entre los resultados de los métodos en carga y en descarga.

Para que afecten menos a la determinación de las constantes del sistema, podrían usarse condensadores más pequeños (con resistencias mayores para mantener un valor de **RC** medible en el dominio del tiempo) o condensadores no electrolíticos (cerámicos, plásticos), que suelen ser más simétricos respecto a la carga y la descarga.