Cálculo de la Pascua

Francisco Jarabo Friedrich

ANTECEDENTES

¿No has sentido nunca curiosidad por saber cómo se establece la fecha de la Semana Santa? ¡Pues yo sí! Muchas veces he necesitado saber cuándo caen esas fechas al año siguiente y no siempre he tenido a mano un calendario en el que las pudiese mirar. Otras veces he necesitado saber cuándo fue la Semana Santa hace dos o tres años; los calendarios tan antiguos ya los había tirado ...

No es que la cosa tenga demasiada importancia, pero siempre he sentido una cierta curiosidad al respecto, aunque nunca me lo había planteado seriamente. De hecho, cuando una vez estuve hurgando en la Enciclopedia Espasa, me di cuenta de que en la voz “calendario” había un apartado con el título “cálculo de la Pascua por fórmulas”, pero no le presté atención. Hice mal, pues poco tiempo después me volví a plantear el problema de conocer las fechas de la Semana Santa. Entonces recordé mi incursión en el Espasa y decidí abordar el problema de una vez por todas.

Como no tengo una casa tan grande para albergar el Espasa y tampoco disponía de una edición en CD-ROM, fui a la biblioteca y solicité una fotocopia de toda la voz “calendario” del Espasa, lo que, por cierto, es un delito contra la propiedad intelectual. Me puse a estudiar el tema con la intención de informatizar los cálculos y me encontré con ciertos problemas. Si bien no resultaron insalvables, aparentemente estaban relacionados, por un lado, con la fecha de edición de la obra (allá por el año 1907) y por otro lado, con la época en que fue desarrollado el método de cálculo. Ésta no la conozco, pero seguro que fue anterior a la primera.

En cualquier caso, el texto utilizado es ciertamente farragoso, tiene bastantes erratas y su matemática es un tanto curiosa. Tan curiosa como que no utiliza el cero. Probablemente porque los romanos no conocían el cero y, a fin de cuentas, nuestro calendario actual procede originariamente del calendario romano y, en última instancia, de la reforma gregoriana de 1582. Por otra parte, el cero no es un número natural. ¿O sí lo es?

Si no existe el cero, ¿qué se hace entonces cuando hay que trabajar con el resto de una división exacta? Muy sencillo: se asigna al resultado el divisor. Pero no siempre. En el cálculo de las “epactas”, en vez de aparecer el cero o el divisor (30), aparece un asterisco (*). ¿No es curioso? Pues como estas curiosidades, hay varias otras.

Entonces, ¿por qué no utilicé una bibliografía más actual? Quizás alguien hubiera homogeneizado estos cálculos hace pocos años y su aplicación fuese más sencilla. Lo cierto es que no he encontrado nada más moderno. Tampoco he invertido grandes esfuerzos en la búsqueda: sólo pretendía resolver una pequeña curiosidad, no escribir una tesis doctoral sobre un tema que no entra en mi campo profesional. Por otra parte, ¿quién perdería su precioso tiempo en abordar un problema ya resuelto hace cinco siglos?

De todas formas, si alguien lee ésto y conoce una referencia más moderna sobre este tema, le agradecería que me informase al respecto. Puede enviarme un mensaje de correo electrónico a fjarabo@ull.es.

De momento he conseguido lo que buscaba. He reproducido el algoritmo de obtención de la fecha de la Pascua, que es de lo que se trata, y lo he implementado informáticamente. He contado con la inestimable colaboración de mis compañeros José Mª Bosch Vallés, Manuel J. García Fernández y Luis E. Rodríguez Gómez. Asimismo he intentado describir el algoritmo de forma comprensible. Quizás lo haya conseguido, aunque sea necesario realizar algunos actos de fe con respecto a las fechas de referencia. ¡Sólo pretendo calcular la Pascua, no todo el calendario gregoriano! Además, este tema no debería estar reñido con la fe, precisamente.

De cualquier forma, creo que la implantación como programa de ordenador del algoritmo del cálculo de la Pascua encontrado es un buen ejercicio didáctico de Matemáticas y me gustaría que fuese contemplado como tal por los profesionales del ramo. Probablemente pueda ser mejorado el algoritmo, pero creo que el original tiene los elementos suficientes como para que sea interesante su estudio como un caso simple de aplicación práctica de las Matemáticas básicas al cálculo por ordenador.

En fin, el cálculo de la Pascua es como el cálculo del NIF, pero en versión religiosa: se parte del año deseado, se realizan cálculos con restos y se le asignan letras, pero de forma mucho más complicada. No es extraño que pueda leerse en el Espasa:

“El calendario religioso es también objeto de tentativas de reforma.

Se refieren, como se comprende, a hacer más o menos fijas las fiestas movibles, descontando desde luego la introducción de la luna. Así se ha propuesto que Pascua tenga lugar el primer domingo de abril".

Ésto fue escrito a principios del siglo XX. Quizás se haga la reforma después del año 2000, ya que éste es el último dato que he encontrado tabulado. Y que conste que la tabla ¡empieza en 1583! El problema es que, probablemente se necesitaría otro concilio para hacer dicha reforma. Mientras tanto, utilicemos este método de cálculo como un bello y entretenido ejercicio matemático.

FUNDAMENTOS DEL CALENDARIO ECLESIÁSTICO

El punto de partida del calendario eclesiástico es la conmemoración de la Resurrección de Cristo en la Pascua. Esta fue la primera fiesta celebrada por los cristianos y la mayor parte de los antiguos la festejaron en domingo.

Por determinación del concilio de Nicea (año 325), la Pascua debe celebrarse el primer domingo después del plenilunio que sigue al equinoccio de primavera, o bien, de forma más concreta, el día de Pascua debe cumplir con las siguientes condiciones:

1ª Acaecer en domingo. Este domingo ha de ser el que sigue al 14º día de la luna pascual. Si el 14º día de la luna pascual es domingo, se entenderá el siguiente.

2ª Luna pascual es aquélla cuyo 14º día tiene lugar en o inmediatamente después del equinoccio de primavera. El equinoccio de primavera tiene lugar el 21 de marzo.

Obsérvese que estas condiciones no tienen nada que ver con los datos astronómicos reales, ya que el equinoccio verdadero puede tener lugar el 20 y aún el 19 de marzo, y las lunas verdaderas pueden diferir de las que resultan del cómputo eclesiástico. Las condiciones indicadas se refieren al cómputo y reglas establecidas al elaborar el calendario gregoriano (año 1582). Aún cuando éstas son rígidas e invariables sólo se ajustan aproximadamente a los datos astronómicos y acontecimientos reales.

De las condiciones anteriores se deduce que:

a) La Pascua no puede acontecer antes del 22 de marzo.

En efecto, si el 14º día de la luna tiene lugar el 21 de marzo, la luna nueva (novilunio) debe acaecer el día 8 (= 21-13) de marzo. Si la luna nueva pascual fuese antes, la luna tendrá 14 días antes del 21 de marzo, y no será luna pascual.

b) La Pascua no puede acontecer después del 25 de abril.

En efecto, el 14º día de la luna pascual tendrá lugar lo más tarde 29 días después del 20 de marzo, es decir, el 18 de abril, ya que una lunación en esta época tiene un período de 29 días. Si el 18 de abril fuese domingo, deberá celebrarse la Pascua el domingo siguiente, es decir, el 25 de abril.

Como se puede ver, el calendario eclesiástico es lunisolar, regido por la fecha de la Pascua de Resurrección dentro del año. Para determinar esta fecha hay que relacionar los tres períodos que intervienen en ella:

✗ Año solar

✗ Revolución sinódica de la luna

✗ Semana

teniendo en cuenta las reglas de formación del calendario actual:

> "Todo año se considerará de 365 días, excepto cuando el número formado por sus dos últimas cifras sea divisible por 4, en cuyo caso tendrá 366, llamándose 'bisiesto'. Sin embargo, los años que expresan un número exacto de siglos no se considerarán bisiestos, a menos que el número de los siglos sea divisible por 4."

Ahora bien, el calendario actual procede del calendario romano, que sufrió la Reforma Juliana (año 47 a.C.; Julio César) y posteriormente la Reforma Gregoriana (año 1582; Gregorio XIII). Como el concilio de Nicea se celebró estando vigente el calendario juliano, el cálculo de la Pascua está basado en los siguientes conceptos de dicho calendario:

ÁUREO NÚMERO:

Número que ocupa un año en un ciclo de 19 años julianos, denominado "ciclo de Metón", caracterizado por el hecho de que las fases de la luna se repiten iguales en iguales días. Para el cómputo se supone que el primer ciclo de Metón empezó el año en que el novilunio acaeció el 1 de enero y éste fue el año anterior a aquél en que empezó nuestra era. Por tanto, para hallar en el calendario juliano el áureo número de un año cualquiera bastará hallar el resto de la división (año + 1)/19.

EPACTA:

Número que representa la edad de la luna al empezar el año, y que permite relacionar el año solar con las revoluciones de la luna. Si la luna en un año determinado está en novilunio el 1 de enero, hasta el 1 de enero del año siguiente habrá transcurrido un año lunar (354 días) más los 11 que faltan para hacer el año solar (365 días). Por tanto, el segundo año la luna tendrá 11 días, por lo que la epacta será 11. Relacionando este cómputo con el ciclo de Metón se puede concluir que hay 30 epactas en el calendario juliano, pudiéndose calcular cada una de ellas como el resto de la división 11·A/30, siendo A el áureo número. Como se verá más adelante, el cálculo indicado no es exacto, debiendo ser sometido a algunas correcciones.

LETRA DOMINICAL:

Letra que corresponde al primer domingo del año y que, por tanto, caracteriza a todos los domingos del año. Si a los siete primeros días del año se les asigna una letra A-G, cada día de la semana estará caracterizado por una letra. A los efectos de cálculo, a las letras dominicales se le asigna un número correlativo del 1 al 7. El cálculo exacto de la letra dominical de un año dado se explica con detalle más adelante.

DETERMINACIÓN DE LA PASCUA

Teniendo en cuenta los conceptos anteriores, se pueden construir las correspondientes hablas de áureo números, epactas y letras dominicales, y referirlas al calendario gregoriano, actualmente vigente. De este modo, las reglas para hallar la Pascua con unas tablas de este tipo serían las siguientes:

1) Hallar el áureo número.
2) Con el áureo número, determinar la epacta.
3) Hallar el primer día después del 7 de marzo en que hay novilunio, es decir, el día posterior al 7 de marzo que corresponde a la epacta del año.
4) Al día así obtenido, añadir 13. Este día será el de la luna llena pascual según el cómputo eclesiástico.

5) Hallar la letra dominical del año.

6) Buscar el día que sigue al calculado para el que la letra dominical sea la del año. Este día tiene lugar la Pascua.

Como puede apreciarse, el método indicado implica utilizar varias tablas que, por otra parte, son muy complejas de construir, y no demasiado fáciles de manejar. No obstante, basándose en las reglas de construcción de los calendarios juliano y gregoriano, se pueden deducir una serie de expresiones que permitirán plasmar las reglas anteriores en ecuaciones matemáticas. La resolución de dichas ecuaciones es bastante tediosa, pero se presta muy bien a su programación para su tratamiento informático.

ALGORITMO DE CALCULO DE LA PASCUA

A continuación se establecerá un algoritmo de cálculo de la Pascua en el que se han contemplado algunas correcciones al método original, imprescindibles para poder realizar los cálculos de forma automática. Teniendo en cuenta que en los cálculos que se van a desarrollar intervienen frecuentemente valores enteros de cocientes y restos de cocientes, se adoptará por convención la siguiente nomenclatura para los mismos:

$[r/s]_E$: valor *entero* del cociente r/s.

$[r/s]_R$: valor *del resto* del cociente r/s.

El único dato que se necesita para el cálculo es:

Y: año en que se desea calcular la Pascua

cuyo número de centenas es:

$$\boxed{C = \left[\frac{Y}{100}\right]_E}$$

Cálculo del áureo número (A):

Como ya se ha mencionado con anterioridad, el áureo número se calcula mediante la expresión:

$$A = \left[\frac{Y+1}{19}\right]_R$$

Al estar sus valores reales comprendidos entre 1 y 19, ha de tomarse para el resto cero, A = 19, lo que se consigue generalizando la ecuación anterior de la forma:

$$\boxed{A = \left[\frac{Y+1}{19}\right]_R + 19\cdot\left[\frac{19 - \left[\frac{Y+1}{19}\right]_R}{19}\right]_E}$$

Cálculo de la letra dominical (D):

Sea Z el número de la letra dominical de un año cualquiera de referencia. Como todo año no bisiesto acaba en el mismo día de la semana en que empieza, la letra dominical del año siguiente será Z - 1. Al cabo de X años de 365 días, la letra dominical habrá retrocedido Z - X lugares, con lo cual:

$$D = Z - X$$

Ahora bien, según el calendario gregoriano, el año anterior al año 1 empezó en domingo. Su letra dominical fue “A”, o lo que es lo mismo, el número equivalente a la misma es 1. Por tanto, la letra dominical de referencia para nuestra era es Z = 1, con lo que la ecuación anterior queda de la forma:

$$D = 1 - X$$

Para poner X en función del año real del calendario gregoriano, Y, habrá que considerar sus reglas de formación, que contemplan un año bisiesto cada cuatro años, con lo que X debe aumentarse, en principio, en el cociente entero de (Y/4), es decir:

$$X = Y + \left[\frac{Y}{4}\right]_E$$

Por otra parte, habrá que tener en cuenta también que los años que expresan un número exacto de centenas no son bisiestos, a menos que sean múltiplos de 4. Ello obliga a restar a la expresión anterior el número de centenas, C, y añadirle el cociente entero de este número dividido por 4, es decir:

$$X = Y + \left[\frac{Y}{4}\right]_E - C + \left[\frac{C}{4}\right]_E$$

De esta forma, la expresión de la letra dominical quedaría:

$$D = 1 - Y - \left[\frac{Y}{4}\right]_E + C - \left[\frac{C}{4}\right]_E$$

Como la letra dominical se repite con una frecuencia 7, la expresión anterior será equivalente a tomar el resto de la división por 7 del segundo miembro:

$$D = \left[\frac{1 - Y - \left[\frac{Y}{4}\right]_E + C - \left[\frac{C}{4}\right]_E}{7}\right]_R$$

Como D no puede ser negativo y, según la expresión anterior casi siempre lo será, habrá que añadirle 7 al segundo miembro, con lo cual quedará la expresión definitiva para la letra dominical:

$$\boxed{D = 7 + \left[\frac{1 - Y - \left[\frac{Y}{4}\right]_E + C - \left[\frac{C}{4}\right]_E}{7}\right]_R}$$

Cálculo de la epacta (E):

Como ya se ha visto anteriormente, la epacta en el calendario juliano, J, es una función del áureo número, A, de la forma:

$$J = \frac{11\ A}{30}$$

Para referirla al calendario gregoriano actual, habrá que tomar como referencia que en el año de su implantación, 1582, la epacta era 26 y el áureo número, 6.

De esta forma, habrá que sumar a la epacta juliana su valor en 1582 y restar al áureo número su valor en dicho año, quedando, al tratarse de una función de período 30:

$$J = \left[\frac{(26 + 11(A - 6)}{30}\right]_R$$

Desarrollando el numerador y considerando que se está operando con restos de dividir por 30:

$$11A - 40 \equiv 11A - 10$$

con lo cual:

$$\boxed{J = \left[\frac{11A - 10}{30}\right]_R}$$

El valor así obtenido es necesario ahora modificarlo según las correcciones del calendario gregoriano, de tal forma que la epacta verdadera en el calendario gregoriano, E, tendrá la forma:

$$E = J + S + L$$

siendo:

S: corrección solar respecto al calendario gregoriano

L: corrección lunar respecto al calendario gregoriano

Corrección solar de la epacta (S):

Para la corrección solar debe disminuirse la epacta J en una unidad cada año que sea un número exacto de siglos a menos que este número sea múltiplo de 4. Como se cuenta a partir de 1582, la corrección se habrá de tomar a partir de 1600, con lo que:

$$\boxed{S = -(C - 16) + \left[\frac{C - 16}{4}\right]_E}$$

Corrección lunar de la epacta (L):

Según la definición del calendario gregoriano, las epactas se aumentan en 8 unidades cada 25 siglos según la siguiente secuencia: una unidad cada 3 siglos durante 7 veces y luego una unidad en los 4 siglos restantes. La corrección lunar tendrá un período 3, corregido por una función que tenga en cuenta el período 25. De esta forma, si se denomina M al número de siglos transcurridos para un año cualquiera, se tendrá:

$$L = \left[\frac{M - \alpha}{3} \right]_E$$

siendo α una función de M, de período 25 y que ha de ser cero para M < 24 y la unidad para este valor, es decir:

$$\alpha = \left[\frac{M + 1}{25} \right]_E$$

Además, teniendo en cuenta que se toma por convención que uno de los períodos de 25 siglos termina en 1800, se tendrá en la expresión de α:

$$M = C - 18$$

con lo cual:

$$\alpha = \left[\frac{C - 17}{25} \right]_E$$

Para referir estas expresiones a las fechas fijas del calendario gregoriano hay que tener en cuenta que éste se estableció en 1582, por lo que en la expresión de L habrá que poner:

$$M = C - 15$$

es decir:

$$L = \left[\frac{C - 15 - \left[\frac{C - 17}{25} \right]_E}{3} \right]_E$$

Epacta gregoriana:

Teniendo en cuenta que el cálculo de la epacta gregoriana puede resultar un número negativo, y al ser éste un parámetro de período 30, la expresión final de la epacta tendrá la forma:

$$E = \left[\frac{30 + J + S + L}{30} \right]_R$$

Cálculo del día de la Pascua:

Como el día de la Pascua se calcula con referencia al equinoccio de primavera y al 14º día de la luna pascual, conviene establecer las siguientes definiciones:

P: número de días entre el 21 de marzo y la Pascua

Q: número de días entre el 21 de marzo y el 15º día de la luna pascual

D: letra dominical, que corresponde al primer domingo del año

F: letra pascual, que corresponde al día en que la luna pascual tiene 15 días

De esta forma, el número de días desde el 21 de marzo y la Pascua, P, puede determinarse mediante la expresión:

$$P = Q + (D - F)$$

y como D es conocido, sólo resta calcular Q y F.

Obsérvese que se han encerrado las dos letras, dominical y pascual, entre paréntesis. Ello es debido a que su diferencia requiere un especial tratamiento matemático, una vez calculados cada uno de sus valores.

Cálculo de Q:

Como Q se refiere a la luna pascual, se relaciona con la edad de la luna, es decir, con la epacta. Si la luna llena se produce el 21 de marzo (Q = 0), la luna nueva anterior (luna pascual) se producirá el 7 de marzo (= 21 - 14). Según la tabla de epactas, la edad de la luna el 7 de marzo, es decir, la epacta del año es 24. Como sucede que a medida que aumenta Q disminuye la epacta en la misma cantidad, se puede poner que:

$$E = 24 - Q$$

o, lo que es lo mismo:

$$Q = 24 - E$$

Obsérvese que el valor de la epacta puede valer más de 24, con lo cual sería negativo. Para evitar este hecho se corrige Q de la forma:

$$\boxed{Q = 24 - E + 30\left[\frac{E}{24}\right]_E}$$

ya que las epactas tienen un período 30.

Cálculo de F:

Si la luna llena se produce el 21 de marzo, se cumplen las mismas condiciones indicadas para el cálculo de Q, además de ser P = 0 y, según la tabla de epactas, D = 3.

Sustituyendo estos valores en la ecuación de P, que da los días entre el 21 de marzo y la Pascua, se tendrá:

$$0 = 24 - E + 30\left[\frac{E}{24}\right]_E + (3 - F)$$

de donde se deduce que:

$$F = 27 - E + 30\left[\frac{E}{24}\right]_E$$

Pero F, al ser un día de la semana, tiene un período 7, con lo cual su valor real será:

$$\boxed{F = \left[\frac{27 - E + 30\left[\frac{E}{24}\right]_E}{7}\right]_R}$$

Diferencia de letras:

Aunque matemáticamente puede aplicarse la ecuación:

$$P = Q + (D - F)$$

para que el cálculo de la Pascua sea correcto, la diferencia de las letras dominical y pascual:

$$R = D - F$$

ha de ser siempre positiva. Para ello basta redefinir esta diferencia de la forma:

$$R = \left[\frac{7 + D - F}{7}\right]_R$$

ya que ambas letras tienen período 7.

Queda así, finalmente, para el valor de P:

$$\boxed{P = Q + \left[\frac{7 + D - F}{7}\right]_R}$$

Cálculo de la fecha de la Pascua:

Una vez obtenidos los días entre el 21 de marzo y la Pascua, P, basta sumar esta cifra al 21 de marzo para obtener la fecha absoluta, teniendo en cuenta que el mes de marzo tiene 31 días.

EJEMPLO DE CÁLCULO

$$\boxed{Y = 1999}$$

$$C = \left[\frac{1999}{100}\right]_E = 19$$

$$A = \left[\frac{1999 + 1}{19}\right]_R + 19 \cdot \left[\frac{19 - \left[\frac{1999 + 1}{19}\right]_R}{19}\right]_E = 5$$

$$D = 7 + \left[\frac{1 - 1999 - \left[\frac{1999}{4}\right]_E + 19 - \left[\frac{19}{4}\right]_E}{7}\right]_R = 3$$

$$J = \left[\frac{11 \cdot 5 - 10}{30}\right]_R = 15$$

$$S = -(19 - 16) + \left[\frac{19 - 16}{4}\right]_E = -3$$

$$L = \left[\frac{19 - 15 - \left[\frac{19 - 17}{25}\right]_E}{3}\right]_E = 1$$

$$E = \left[\frac{30 + 15 - 3 + 1}{30}\right]_R = 13$$

$$Q = 24 - 13 + 30 \cdot \left[\frac{13}{24}\right]_E = 11$$

$$F = \left[\frac{27 - 13 + 30 \cdot \left[\frac{13}{24}\right]_E}{7}\right]_R = 0$$

$$P = 11 + \left[\frac{7 + 3 - 0}{7}\right]_R = 14$$

$$\boxed{\mathit{PASCUA} = 21\ \mathit{marzo} + 14\ \mathit{días} = 4\ \mathit{abril}}$$