

CAPITULO 1
INTRODUCCION A LA DINAMICA DE SISTEMAS Y AL CONTROL

1.1 CONCEPTOS BASICOS	<u>1</u>
1.2 SISTEMAS FISICOS Y MODELOS MATEMATICOS	<u>2</u>
1.3 ESTUDIO DE LA DINAMICA DE UN SISTEMA	<u>6</u>
1.4 ANALISIS DE LOS SISTEMAS DE CONTROL	<u>7</u>
1.5 DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL	<u>9</u>

1.1 CONCEPTOS BASICOS

La teoría de la regulación automática o teoría del control estudia el comportamiento dinámico de un sistema.

Se conoce como "**sistema**" a un conjunto de elementos relacionados entre sí, de forma que determinadas magnitudes de cada uno de ellos pueden estar interrelacionadas con las de los demás y modificarse o alterarse mutuamente. A las magnitudes que definen el comportamiento de un sistema se las denomina "**variables del sistema**" y según su naturaleza, configuran el carácter del mismo.

Los habituales cálculos para el diseño en estado estacionario de un sistema no dicen nada sobre cuál será la respuesta dinámica del mismo. Estos cálculos muestran el estado inicial y el estado final, pero no como llegar de uno a otro. Es este cambio de estado lo que proporcionará el estudio de la dinámica del sistema, es decir, el comportamiento del sistema en función del tiempo.

Para unificar el tratamiento teórico de los sistemas, la teoría de sistemas se vale fundamentalmente de modelos matemáticos que representan y describen con gran aproximación su comportamiento, en cuanto a sus relaciones causa-efecto. En principio, estos modelos pueden integrarse en dos grupos fundamentalmente diferentes: modelos axiomáticos y modelos empíricos. Los primeros se obtienen a partir de las ecuaciones físico-matemáticas que caracterizan el comportamiento dinámico del sistema. Los segundos representan el conocimiento adquirido del comportamiento del mismo a través de relaciones entrada-salida.

Se presentan, pues, dos posibilidades de descripción de los sistemas: una "**externa**", tradicionalmente utilizada para sistemas sencillos, y otra "**interna**", para sistemas de gran complejidad. Ambas posibilidades agrupan tras de sí métodos de cálculo básicamente diferentes, dando lugar en el caso de los sistemas de control a las denominadas "**teoría clásica de control**" y "**teoría moderna de control**", basadas respectivamente, en los modelos empírico y axiomático.

La teoría clásica de control se desarrolló durante la II Guerra Mundial y se caracteriza por la introducción del concepto de "**función de transferencia**" y por el análisis y diseño mediante métodos de cálculo basados en la transformada de Laplace

y en la respuesta del sistema, fundamentalmente, en el dominio de la frecuencia.

La teoría moderna de control se ha desarrollado como consecuencia de la aparición de los modernos ordenadores de gran velocidad de cálculo. Se caracteriza por la introducción del concepto de "**variable de estado**" y utiliza en gran medida el álgebra matricial, realizándose el análisis y el diseño, fundamentalmente, en el dominio del tiempo.

En comparación con la teoría moderna, la teoría clásica tiene la ventaja de hacer menos énfasis en las técnicas matemáticas y más en la comprensión clara del comportamiento físico del sistema. Por otra parte, en determinadas circunstancias, la solución clásica no sólo es la más sencilla, sino la más adecuada. En aquellos casos en los que los sistemas son más complejos, la teoría moderna puede conducir a la realización de un diseño más exacto y completo de los mismos. De todas formas, ambos métodos, cada uno en su dominio, son de gran eficacia y suelen utilizarse alternativamente, según las características del problema objeto de estudio.

Por los motivos expuestos y por su enfoque eminentemente físico, se ha considerado como más adecuado dedicar el desarrollo que sigue al estudio de la teoría clásica de control, sin que ello suponga un abandono de la teoría moderna, que podría ser tratada adecuadamente en otro curso.

1.2 SISTEMAS FISICOS Y MODELOS MATEMATICOS

Para poder realizar el análisis de cualquier sistema interesa conocer, inicialmente, la relación existente entre determinadas "**entradas**" o excitaciones y ciertas "**salidas**" o respuestas. Así, en la [Figura 1](#) se ha representado el sistema mediante un bloque donde se incluyen las variables que actúan sobre el mismo, representando las flechas el sentido de circulación de la información.

En la [Figura 1](#) pueden distinguirse cuatro tipos diferenciados de variables. Por una parte las variables de "**entrada**" o de "**excitación**" (u_i) y las "**perturbaciones**" (z_i). Ambas influyen sobre el sistema desde el exterior; las primeras pueden ser elegidas libremente, pero no así las segundas, cuya acción sobre el sistema se realiza de forma totalmente incontrolada.

DINAMICA DE SISTEMAS, SIMULACION Y CONTROL

Capítulo 1

Un segundo grupo de variables lo constituyen las "**variables de salida**" o "**respuesta del sistema**" (y_i), y las "**variables de estado**" (x_i). Estas últimas son el conjunto mínimo de variables del sistema tal que, conocido su valor en un instante dado, permiten conocer la respuesta del sistema ante cualquier señal de entrada o perturbación. Tanto las variables de salida como las de estado facilitan información sobre el comportamiento del sistema. Las primeras son accesibles, por lo que pueden ser medidas; las segundas no siempre lo serán.

La teoría clásica de control estudia el comportamiento dinámico del sistema ante perturbaciones, a partir de las relaciones existentes entre las variables de entrada y las de salida, caracterizándolo, por tanto, por su comportamiento externo. La teoría moderna de control caracteriza el sistema mediante las variables de estado, es decir, por su comportamiento interno.

Los sistemas físicos son representados para su estudio por modelos integrados por componentes ideales, cuyo comportamiento pueda ser definido mediante expresiones matemáticas. Las bases para los modelos matemáticos son leyes físicas y químicas fundamentales como:

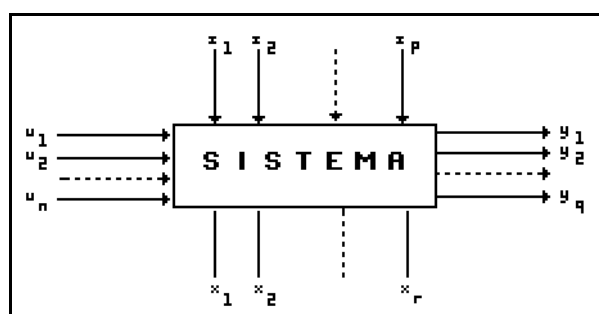


Figura 1 Variables de un sistema

- * Ecuaciones de conservación (cantidad de movimiento, energía, materia total y componentes)
- * Ecuaciones fenomenológicas de transporte (leyes de Newton, Fourier y Fick)
- * Ecuaciones de estado (por ejemplo, ecuación de los gases ideales)
- * Equilibrio químico (ley de acción de masas)
- * Equilibrio entre fases (ley de Raoult, volatilidad relativa, coeficientes de actividad)
- * Cinética química (ecuaciones de velocidad, ley de Arrhenius)

La elección del tipo de modelo más adecuado para representar correctamente un sistema físico no es un problema simple, pues entraña un compromiso importante

DINAMICA DE SISTEMAS, SIMULACION Y CONTROL

Capítulo 1

entre la complejidad del modelo seleccionado y la rigurosidad con que éste represente el comportamiento del sistema real. Si el modelo utilizado es demasiado simple, los resultados obtenidos de su tratamiento no coinciden exactamente con la realidad física. Por el contrario, si fuese demasiado complicado, su estudio podría resultar, si no imposible, sí al menos de gran complejidad y dificultad.

La representación matemática de un sistema físico viene dada por ecuaciones diferenciales, generalmente no lineales. Sin embargo, si los valores de las señales de entrada de un sistema no sobrepasan los comprendidos en el intervalo dentro del cual los componentes del sistema pueden considerarse como lineales, éste podrá ser tratado como lineal en dicho intervalo, caso que es el que más frecuentemente se da en la práctica.

Los sistemas lineales representan un grupo de gran importancia, en primer lugar porque son los más corrientemente utilizados, y por otra parte, porque es precisamente para este tipo de sistemas para los que se han desarrollado los métodos de cálculo más potentes. A ello contribuye también el que el comportamiento de determinados elementos no lineales y su influencia sobre el sistema, en numerosos casos, sólo puede ser estudiado aproximando dichos elementos por otros, de comportamiento lineal. Desde un punto de vista físico, los sistemas pueden ser de "**parámetros concentrados**" y de "**parámetros distribuidos**". Los primeros son aquéllos en los cuales sus características físicas se suponen concentradas en núcleos puntuales, independientemente de cualquier distribución espacial. En un sistema de parámetros distribuidos, por el contrario, se tiene en cuenta la distribución espacial de sus características físicas.

Los sistemas de parámetros concentrados se definen normalmente por ecuaciones diferenciales ordinarias; los de parámetros distribuidos por ecuaciones en derivadas parciales.

Los sistemas pueden ser también "**estacionarios**" o invariantes en el tiempo y "**no estacionarios**" o variantes con el tiempo. Los primeros son aquéllos cuyos parámetros no varían con el tiempo, es decir, su salida es independiente del instante en que sea aplicada la señal de entrada y los coeficientes de la ecuación diferencial que describe su comportamiento son constantes. En los sistemas no estacionarios, uno

DINAMICA DE SISTEMAS, SIMULACION Y CONTROL

Capítulo 1

o varios parámetros pueden variar con el tiempo, por lo que ha de ser conocido el instante en que se aplica la señal de entrada; los coeficientes de la correspondiente ecuación diferencial no son constantes.

Considerando el carácter de sus variables, los sistemas pueden ser "**deterministas**" y "**estocásticos**" o aleatorios. Un sistema es determinista cuando su comportamiento futuro puede predecirse y repetirse, dentro de límites razonables, lo que equivale a decir que para cada señal de entrada hay una salida única. Por el contrario, un sistema es estocástico cuando no se cumplen las condiciones anteriores, es decir, para una entrada única pueden existir varias salidas, cada una de ellas con una determinada probabilidad de existencia.

Desde el punto de vista del número de variables del sistema, estos pueden ser "**multivariantes**", cuando existen varias entradas y varias salidas o "**de una sola variable**", cuando sólo existe una variable de entrada a la cual corresponde una sola variable de salida. Un sistema lineal multivariable puede ser tratado como si estuviese constituido por varios sistemas de una sola variable de acción superpuesta.

Atendiendo al tipo de las señales utilizadas existen "**sistemas continuos**", que son aquéllos en los que todas las variables son funciones continuas del tiempo, y "**sistemas discretos**", en los que una o varias variables están definidas o existen solamente en una secuencia de valores discretos de la variable independiente tiempo. Si los intervalos de tiempo a que es definida la señal son iguales, los sistemas discretos se denominan "**sistemas muestreados**".

La teoría clásica de control, que se abordará posteriormente, tratará exclusivamente sistemas lineales, de parámetros concentrados, estacionarios, deterministas, de una sola variable y continuos.

1.3 ESTUDIO DE LA DINAMICA DE UN SISTEMA

El comportamiento dinámico, dependiente del tiempo, de un sistema simple, se puede llevar a cabo utilizando técnicas matemáticas analíticas clásicas. Aunque la

mayoría de los sistemas en Ingeniería Química son no lineales, muchos de ellos pueden ser linealizados convenientemente para estudiar su dinámica y diseñar los sistemas de control. Los sistemas más complejos normalmente pueden ser divididos en elementos más simples cuyo comportamiento dinámico es necesario comprender previamente antes de abordar el estudio de los más complejos.

Las ecuaciones diferenciales no lineales que representan a un sistema pueden ser linealizadas aplicando un desarrollo en serie de Taylor alrededor del estado estacionario de operación y despreciando todos los términos superiores a la primera derivada parcial, es decir:

$$y = f(x) \approx f(|x|) + \left(\frac{dy}{dx} \right)_{|x|} (x - |x|) \quad [1]$$

siendo $|x|$ el valor de estado estacionario de x .

Una vez linealizado el sistema, su dinámica se estudia analizando la respuesta del sistema a una perturbación, partiendo de un estado inicial, es decir, se estudia la "**dinámica en lazo abierto**" del sistema, sin ningún tipo de control.

El estudio de la dinámica de estos sistemas lineales simples se puede llevar a cabo en los dominios del tiempo, de Laplace y de la frecuencia. Por "**dominio del tiempo**" se entiende la obtención de la dependencia de las variables del sistema con el tiempo, resolviendo las ecuaciones diferenciales que describen el sistema. Estas funciones dinámicas muestran lo que sucede en el sistema al transcurrir el tiempo, lo que constituye el interés principal del estudio. Sin embargo, existen grandes ventajas en la notación y en el cálculo utilizando transformadas de Laplace y Fourier para estudiar la dinámica y diseñar sistemas de control en el "**dominio de Laplace**" y en el "**dominio de la frecuencia**", respectivamente. Estas técnicas de transformación, muy útiles, permiten establecer las relaciones dinámicas entre las variables de entrada y salida. Tales relaciones se denominan "**funciones de transferencia**".

1.4 ANALISIS DE LOS SISTEMAS DE CONTROL

Una vez estudiada la dinámica de un sistema en cualquiera de los dominios indicados, se puede acometer más fácilmente el estudio de los sistemas de control o regulación, cuya configuración más sencilla es el "**lazo cerrado con realimentación**", cuyo esquema básico se muestra en la [Figura 2](#).

El punto de partida, y a la vez, centro de todo el sistema, es el proceso que se desea controlar. En él una determinada variable ha de ser influida de forma que su variación en función del tiempo se ajuste a una ley prefijada. Por ejemplo, que alcance un determinado valor y que se mantenga en él aunque se produzcan ciertas perturbaciones en la marcha del proceso. A esta variable, c , que constituye la salida del sistema, se la denomina "**variable controlada**".

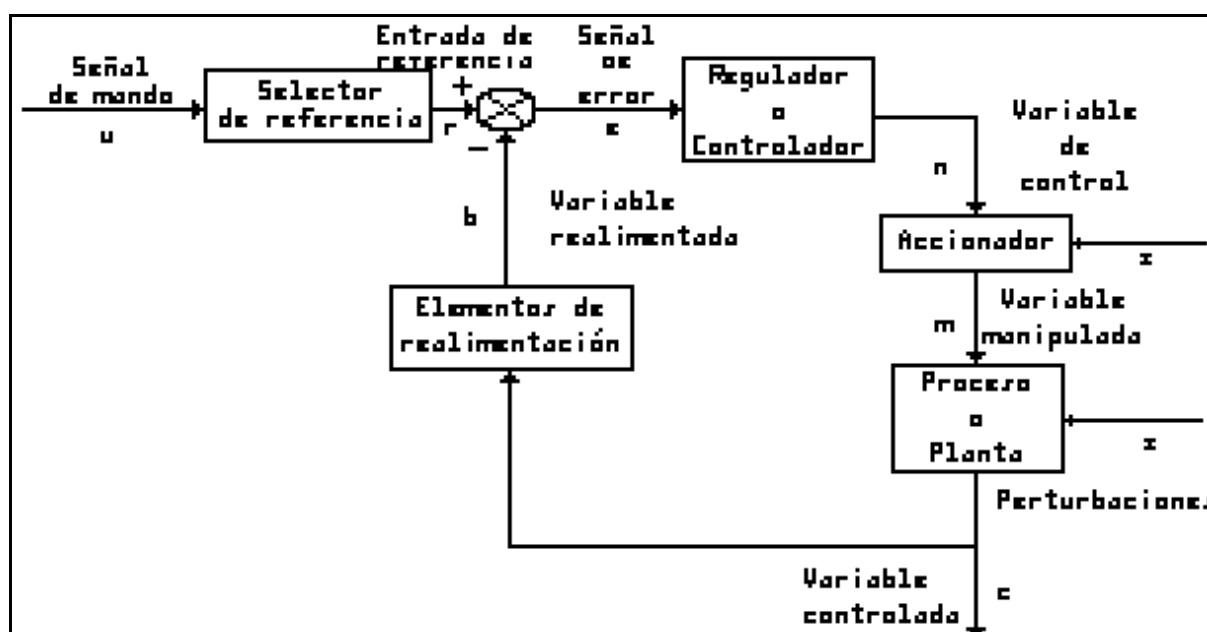


Figura 2 Diagrama de bloques de un controlador

Dentro del propio sistema, o exteriormente a él, se originan "**perturbaciones**", z , que afectan a la variable controlada de forma que ésta adquiere valores diferentes a los previstos. Para llevar nuevamente la variable controlada a su valor correcto y mantenerla en él, se capta ésta mediante un dispositivo de medida adecuado, dirigiéndola a través de un elemento de realimentación a un comparador.

A la señal de salida del elemento de realimentación, b , se la denomina "**variable**

realimentada". Dicha variable da una indicación de los valores que va tomando la variable controlada, de forma que puede ser comparada constantemente con una **"señal de referencia"**, r , en un comparador. A la señal de salida del comparador, e , obtenida en forma de diferencia $e = r - b$, se la denomina **"señal de error"**. Si la señal de error es nula, la variable controlada tendrá un valor que coincide exactamente con el previsto. Si no lo fuera, el error actuaría sobre un regulador o corrector, que a su salida proporciona una señal o **"variable de control"**, n , la cual influirá sobre el proceso a través de un accionador para que el error tienda a reducirse a cero. A la señal de entrada al proceso, m , procedente del accionador, se la denomina **"variable manipulada"** o **"variable de acción"**.

La señal de referencia, que es la que fija la ley de variación de la salida del sistema en función del tiempo, se obtiene a partir de una entrada o **"señal de mando"**, u , que es preparada en un selector de referencia para poder compararla, dentro de un margen adecuado, con la variable realimentada.

De acuerdo con el esquema presentado, el bucle de control está capacitado para hacer que la influencia de las perturbaciones, internas o externas, sobre la variable controlada sea nula o mínima; pero el sistema también es adecuado para que la señal de salida siga exactamente las variaciones de la señal de mando. En consecuencia puede decirse que los objetivos del sistema de regulación son dos: anular la acción de las perturbaciones sobre la variable controlada y hacer que ésta siga exactamente las variaciones de la señal de mando.

Ahora bien, la adecuación de la variable controlada ante una variación de la señal de mando o una perturbación no es instantánea, sino que requiere de un tiempo determinado. La variación en función del tiempo de la variable controlada durante dicho periodo es de gran importancia para el diseño del sistema de regulación. Puede suceder que se produzcan oscilaciones alrededor del valor correcto de la variable controlada. Si este fenómeno oscilatorio desaparece pasado un determinado periodo de tiempo, el lazo de control será estable. En el caso de que no sea así, el bucle será inestable y, por tanto, no utilizable en la práctica. La estabilidad del sistema es, pues,

una condición absolutamente imprescindible para la utilización del mismo y, por tanto, objetivo fundamental de estudio para la teoría del control.

Asimismo es importante en el comportamiento dinámico de un sistema de control la respuesta transitoria a una perturbación. Se tratará de obtener una mínima sobreoscilación, un corto tiempo de respuesta, un elevado ritmo de decrecimiento y una baja frecuencia y número reducido de oscilaciones. Algunas de estas especificaciones son contrapuestas, por lo que deberán llegarse a un compromiso satisfactorio entre ellas. El estudio de la respuesta transitoria, es pues, otro de los objetivos fundamentales en el análisis de sistemas de control.

1.5 DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL

Una vez estudiados los métodos analíticos de selección de los valores de las acciones de control basados en obtener la estabilidad del sistema definido por el modelo matemático correspondiente, se procede al diseño de un sistema de control. Este diseño no es sí un proceso exacto, ni siquiera bien definido, sino más bien una serie de acciones interrelacionadas que se realizan de forma secuencial y que frecuentemente necesitan de procedimientos de tanteo.

En principio, el objetivo del diseño es definir una estructura adecuada para el sistema de control, de forma que éste cumpla las especificaciones que le han sido impuestas a la variable controlada. Para ello se deberá elegir un accionador que actúe sobre el proceso, un dispositivo de medida para captar la señal de salida o variable controlada y un detector de error para comparar la variable realimentada con la referencia. Elegidos estos componentes, se analiza el comportamiento del sistema y se ajusta éste a las especificaciones, buscando siempre una respuesta satisfactoria del sistema. Los métodos matemáticos para realizar esta labor están basados tanto en el análisis del dominio del tiempo, como en el de Laplace y frecuencial.

2.1 OBJETIVOS	1
2.2 CONCEPTO DE FUNCION DE TRANSFERENCIA	1
2.3 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE SISTEMAS SENCILLOS	4
2.3.1 SISTEMAS DE PRIMER ORDEN DE RETRASO	4
2.3.1.1 TERMOMETRO DE MERCURIO: CONSTANTE DE TIEMPO	4
2.3.1.2 REACTOR TANQUE AGITADO MEZCLA COMPLETA: GANANCIA	7
2.3.1.3 TANQUE DE NIVEL VARIABLE Y SALIDA LIBRE A LA ATMOSFERA: LINEALIZACION	9
2.3.1.4 TANQUE AGITADO MEZCLA COMPLETA CON CAMISA DE CALEFACCION: PERTURBACIONES MULTIPLES	13
2.3.2 SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN DE RETRASO	17
2.3.2.1 MANOMETRO DE MERCURIO: ECUACION DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN	17
2.3.2.2 TERMOMETRO Y SU ALOJAMIENTO: SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN	21
2.3.3 TIEMPO MUERTO	25

2.1 OBJETIVOS

Como ya se ha indicado en el capítulo anterior, las técnicas de análisis y diseño propias de los sistemas de control requieren inicialmente la obtención de un modelo matemático del sistema en cuestión.

Una de las formas de modelo matemático más adecuada para los sistemas lineales continuos, estacionarios, de parámetros concentrados y con un número de entradas y salidas limitado es la **"función de transferencia"**. Por este motivo se dedica este capítulo a mostrar las ecuaciones definitorias y funciones de transferencia de algunos de los elementos o componentes físicos más frecuentemente utilizados en los sistemas de control de procesos químicos.

2.2 CONCEPTO DE FUNCION DE TRANSFERENCIA

Se define como **"función de transferencia"**, $G(s)$ de un sistema lineal, o de uno de sus componentes, al cociente entre la transformada de Laplace de la variable de salida y la transformada de Laplace de la variable de entrada, consideradas nulas las condiciones iniciales. Así, partiendo de la representación de la [Figura 1](#) se tendrá:

$$G(s) = \frac{\mathcal{L} c(t)}{\mathcal{L} r(t)} = \frac{C(s)}{R(s)} \quad [1]$$

De esta expresión se desprende que, dado un determinado sistema cuya función de transferencia sea conocida, y obtenida la transformada de Laplace de la señal de entrada, puede hallarse de forma inmediata la transformada de Laplace $C(s)$ de la señal de salida, o respuesta del sistema en el dominio de la variable compleja s . Para obtener la

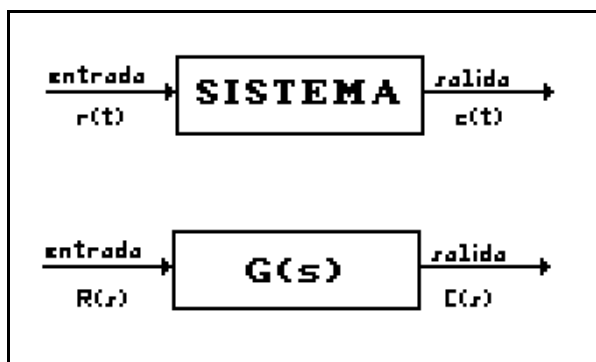


Figura 1 Función de transferencia de un sistema

respuesta temporal, no hay más que calcular la transformada inversa de Laplace de $C(s)$.

Objetivamente analizada, la función de transferencia de un sistema no es otra cosa que la información contenida en la ecuación diferencial que caracteriza el comportamiento del mismo en el dominio temporal, trasladada al dominio complejo. Así, si se tiene un sistema lineal de entrada y salida únicas, cuyo comportamiento responda a la ecuación diferencial de coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} a_o \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n c(t) = \\ = b_o \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m r(t) \end{aligned} \quad [2]$$

siendo $r(t)$ la variable de entrada y $c(t)$ la de salida, aplicando la transformada de Laplace a los dos miembros de dicha ecuación y suponiendo condiciones iniciales nulas, se tendrá:

$$\begin{aligned} C(s) [a_o s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n] = \\ = R(s) [b_o s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m] \end{aligned} \quad [3]$$

resultando como expresión para la función de transferencia la siguiente:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_o s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_o s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad [4]$$

Como se puede observar, la función de transferencia viene expresada en este caso por el cociente de dos polinomios $N(s)$ y $D(s)$ en la variable compleja s de Laplace; sus características dependen únicamente de las propiedades físicas de los elementos integrantes del sistema, no de la señal de entrada aplicada o de las

condiciones iniciales.

Para los sistemas físicos reales los coeficientes a y b son números reales y $n > m$. Esta última condición expresa el hecho de que el sistema no puede responder a una señal de entrada antes de que ésta haya sido aplicada.

El denominador, $D(s)$ es conocido también por el nombre de "**función característica**", pues incluye a través de los valores de sus coeficientes las características físicas de los elementos que componen el sistema.

A la ecuación:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad [5]$$

se la denomina "**ecuación característica del sistema**" y sus raíces determinan la estabilidad del mismo, así como la naturaleza de su respuesta transitoria para cualquier tipo de señal de entrada.

El numerador $N(s)$ de la función de transferencia determina la forma en que la señal de entrada es introducida en el sistema, y no afecta a la estabilidad del mismo, ni al número y naturaleza de los modos transitorios. Sin embargo, juntamente con la señal de entrada utilizada, determina la magnitud y signo de cada modo transitorio, estableciendo la configuración de la respuesta transitoria así como el valor en régimen permanente que adquiere la señal de salida.

Existen varios métodos para obtener la función de transferencia de un sistema. El más utilizado analíticamente es el puramente matemático de obtener la transformada de Laplace de la ecuación diferencial que describe el comportamiento del sistema, para hallar posteriormente la relación $G(s) = C(s)/R(s)$, bajo condiciones iniciales nulas.

Otro método es el experimental, consistente en introducir en el sistema una señal de prueba conocida, para obtener la función de transferencia a partir de la forma que presenta la señal de salida o respuesta del sistema. Como variante de este método podría también obtenerse la función de transferencia a partir de los datos y curvas de funcionamiento del sistema.

2.3 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE SISTEMAS SENCILLOS

Se presentan seguidamente algunos ejemplos de procesos elementales. Aunque un sistema puede presentar varias variables de entrada, para calcular la función de transferencia respecto a una determinada variable de entrada se suponen constantes el resto de ellas.

Se considerarán los llamados "**elementos de primer orden de retraso**", cuyas ecuaciones diferenciales son lineales y de primer orden, "**elementos de segundo orden de retraso**", cuyas ecuaciones diferenciales son lineales y de segundo orden o que están descritas por dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, y el elemento "**tiempo muerto**", o retraso en la transmisión de señales que se produce en muchos procesos.

2.3.1 SISTEMAS DE PRIMER ORDEN DE RETRASO

2.3.1.1 TERMOMETRO DE MERCURIO: CONSTANTE DE TIEMPO

Considérese el bulbo de un termómetro de mercurio tal como se muestra en la [Figura 2](#)

Supóngase que este termómetro inicialmente está en estado estacionario, es decir, para $t < 0$, no existe variación de temperatura con el tiempo. Supóngase asimismo que la resistencia a la transmisión de calor de la pared es despreciable y que mercurio se encuentra a una temperatura T_2 .

Para $t = 0$, el termómetro se somete a un aumento en la temperatura ambiente, que se considerará T_1 .

El balance de energía en régimen no estacionario, se podrá poner de la forma, considerando los valores instantáneos de

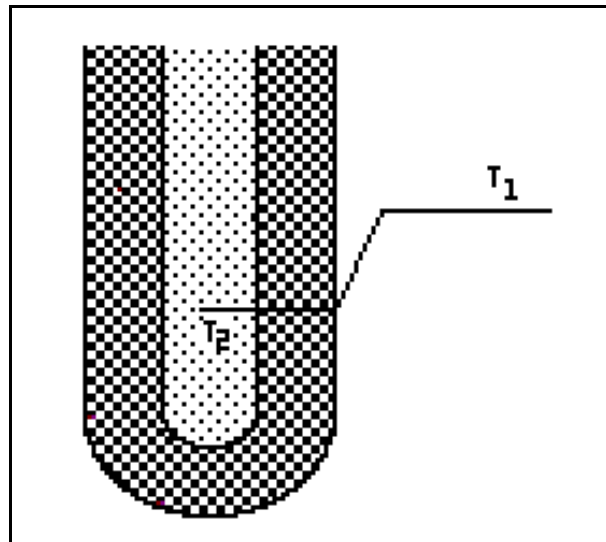


Figura 2 Bulbo de un termómetro de mercurio

las variables, T_{1i} y T_{2i} :

$$U A (T_{1i} - T_{2i}) - 0 = m C_p \frac{dT_{2i}}{dt} \quad [6]$$

donde:

U : coeficiente global de transmisión de calor (kJ/s.m².K)

A : superficie de transmisión de calor del bulbo (m²)

m : masa de mercurio (kg)

C_p : calor específico del mercurio (kJ/kg.K)

Por su parte, el balance de energía en estado estacionario queda de la forma:

$$U A (T_{1e} - T_{2e}) - 0 = m C_p \frac{dT_{2e}}{dt} = 0 \quad [7]$$

Restando [7] de [6], se tendrá:

$$U A (T_{1i} - T_{1e}) - U A (T_{2i} - T_{2e}) = m C_p \frac{d(T_{2i} - T_{2e})}{dt} \quad [8]$$

Si ahora se considera el estado estacionario como estado de referencia (nulo), y se definen las "**variables de perturbación**", x , de la forma:

$$x = x_i - x_e \quad [9]$$

Para poder considerar condiciones iniciales nulas, tal como exige la definición de función de transferencia, la ecuación [8] se transformará en:

$$U A T_1 - U A T_2 = m C_p \frac{dT_2}{dt} \quad [10]$$

Reordenando la ecuación de tal forma que los términos de T_2 , la variable de salida y los términos con T_1 , la variable de entrada, queden separadas, y dividiendo por el coeficiente de la variable de salida, se tiene:

$$\tau \frac{dT_2}{dt} + T_2 = T_1 \quad [11]$$

siendo $\tau = m C_p / U A$ la llamada "**constante de tiempo**" del sistema, que, como se puede comprobar, tiene las dimensiones de un tiempo.

Como se puede observar, la velocidad de respuesta del sistema, dT_2/dt , es inversamente proporcional a la constante del tiempo, y por ello ésta es una medida del tiempo requerido por el sistema para adaptarse a una nueva señal de entrada.

La transformada de Laplace de la ecuación [11] es:

$$\tau s T_2(s) + T_2(s) = T_1(s) \quad [12]$$

mientras que la función de transferencia será:

$$G(s) = \frac{T_2(s)}{T_1(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad [13]$$

Las relaciones funcionales entre las variables del sistema se representan mediante los llamados "**diagramas de bloques**", por lo que en este caso se tendría el diagrama mostrado en la [Figura 3](#).

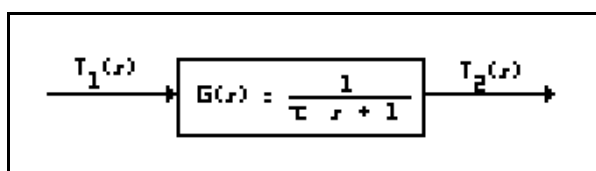


Figura 3 Diagrama de bloques de un termómetro de mercurio

2.3.1.2 REACTOR TANQUE AGITADO MEZCLA COMPLETA: GANANCIA

Considérese un tanque agitado mezcla completa en el que no se produce ninguna reacción química y cuyo nivel se mantiene constante, según muestra el esquema de la [Figura 4](#).

El balance de materia alrededor del tanque en un instante será:

$$F C_{1i} - F C_{2i} = V \frac{d C_{2i}}{dt} \quad [14]$$

donde F es el caudal (m^3/s), V el volumen del tanque (m^3) y C_1 , C_2 las concentraciones de un componente a la entrada

y a la salida del tanque, respectivamente. Al igual que en el caso anterior, el valor inicial de las concentraciones se toma como cero, de tal forma que C_1 y C_2 representan las desviaciones del valor normal o estacionario, es decir, el balance en estado estacionario será:

$$F C_{1e} - F C_{2e} = V \frac{d C_{2e}}{dt} = 0 \quad [15]$$

con lo que,

$$F (C_{1i} - C_{1e}) - F (C_{2i} - C_{2e}) = V \frac{d (C_{2i} - C_{2e})}{dt} \quad [16]$$

y la ecuación, en función de las variables de perturbación, tendrá la forma:

$$F C_1 - F C_2 = V \frac{d C_2}{dt} \quad [17]$$

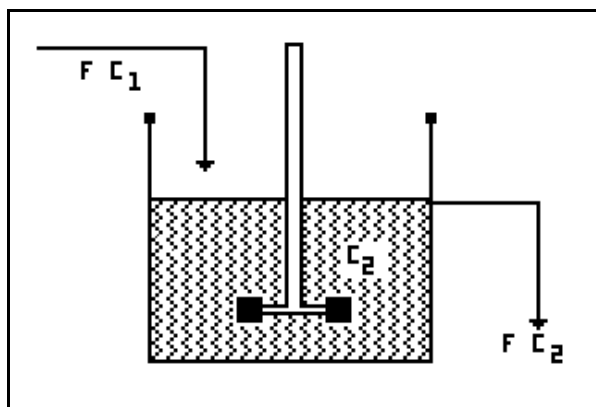


Figura 4 Tanque agitado mezcla completa

Transformando la ecuación [17] dividiendo por el coeficiente de la variable de salida:

$$\tau \frac{d C_2}{dt} + C_2 = C_1 \quad [18]$$

donde τ es la constante de tiempo del sistema, que en este caso es V/F y coincide con el tiempo de residencia. Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación [18] se tendrá:

$$\tau s C_2(s) + C_2(s) = C_1(s) \quad [19]$$

con lo que la función de transferencia de este sistema será:

$$G(s) = \frac{C_2(s)}{C_1(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad [20]$$

lo que demuestra que el sistema es lineal de primer orden.

Si ahora se supone que el tanque se utiliza como reactor químico, la cantidad de materia que reacciona por unidad de tiempo es un término adicional de salida en el balance de materia. Si la reacción es de primer orden, se tendrá:

$$r \left(\frac{kg}{s} \right) = k (s^{-1}) C \left(\frac{kg}{m^3} \right) V (m^3) \quad [21]$$

y el balance de materia quedará, referido ya a variables de perturbación:

$$F C_1 - (F C_2 + k V C_2) = V \frac{dC_2}{dt} \quad [22]$$

reordenando términos:

$$\frac{V}{F + k V} \frac{dC_2}{dt} + C_2 = \frac{F}{F + k V} C_1 \quad [23]$$

que también se puede poner de la forma:

$$\tau \frac{dC_2}{dt} + C_2 = K C_1 \quad [24]$$

siendo ahora $\tau = V/(F + k V)$ la nueva constante de tiempo y $K = F/(F + k V)$ una constante adimensional llamada "**ganancia del sistema**", que representa físicamente en número de veces que la salida es mayor que la entrada. Obsérvese además, que el efecto de la reacción química es hacer la constante de tiempo del sistema inferior al tiempo de residencia.

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación [24] y calculando su función de transferencia:

$$G(s) = \frac{C_2(s)}{C_1(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad [25]$$

que también responde a un sistema lineal de primer orden y permite dar su expresión general en función de sus dos parámetros característicos: la constante de tiempo y la ganancia. Evidentemente, si en el tanque no se produce reacción química el sistema tendrá ganancia unidad.

2.3.1.3 TANQUE DE NIVEL VARIABLE Y SALIDA LIBRE A LA ATMOSFERA: LINEALIZACION

Supóngase un tanque de nivel variable como el del esquema mostrado en la [Figura 5](#).

Si se tiene en cuenta que el caudal de salida sigue una relación del tipo:

$$F_2 = C h^{1/2} \quad [26]$$

siendo h la altura del nivel de líquido, y C una constante. El balance de materia, referido a variables instantáneas, quedaría de la forma:

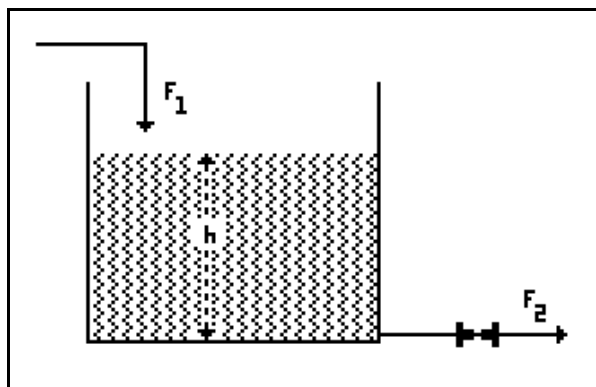


Figura 5 Tanque de nivel variable

$$F_{1i} - C h_i^{1/2} = A \frac{dh_i}{dt} \quad [27]$$

donde A es la superficie del tanque.

Como se puede observar la ecuación diferencial [\[27\]](#) es no lineal, debido a la presencia del término $h^{1/2}$, por lo que no se puede aplicar la transformada de Laplace. Se hace necesario, pues, linealizar la ecuación aplicando un desarrollo en serie de Taylor al término no lineal alrededor de su estado estacionario, es decir:

$$h_i^{1/2} = h_e^{1/2} + \frac{1}{2} h_e^{-1/2} (h_i - h_e) \quad [28]$$

o, lo que es lo mismo:

$$h_i^{1/2} - h_e^{1/2} = \frac{1}{2} h_e^{-1/2} (h_i - h_e) \quad [29]$$

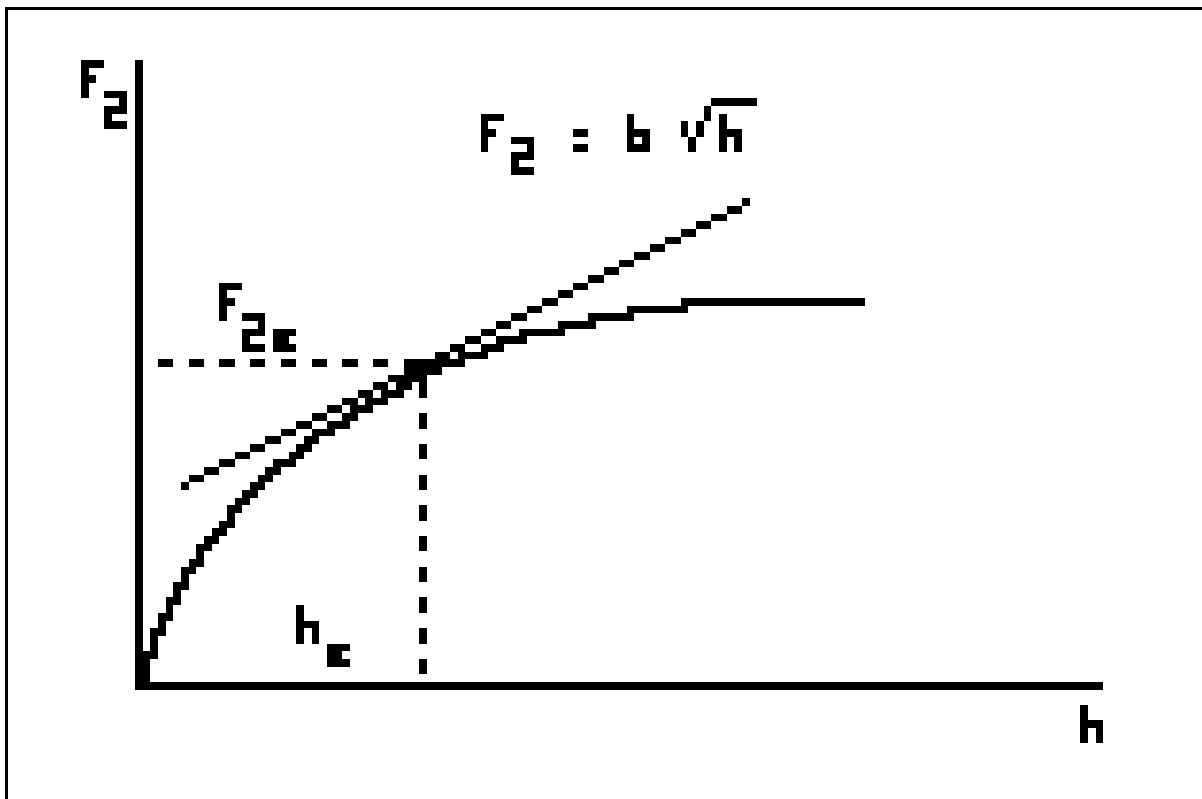


Figura 6 Linealización del sistema de nivel de líquido

Esto significa que se está tomando la tangente a la curva del caudal frente a la altura a un valor medio del caudal equivalente al valor de estado estacionario, tal como muestra la [Figura 6](#).

Obteniendo la ecuación del balance en estado estacionario:

$$F_{1e} - C h_e^{1/2} = A \frac{dh_e}{dt} = 0 \quad [30]$$

y restándola de la [\[27\]](#) se tendrá:

$$F_{1i} - F_{1e} - C (h_i^{1/2} - h_e^{1/2}) = A \frac{d(h_i - h_e)}{dt} \quad [31]$$

Considerando la ecuación de linealización [\[29\]](#) se podrá poner, pues:

$$F_{1i} - F_{1e} - \frac{1}{2} C h_e^{-1/2} (h_i - h_e) = A \frac{d(h_i - h_e)}{dt} \quad [32]$$

y, en forma de variables de perturbación:

$$F_1 - \frac{1}{2} C h_e^{-1/2} h = A \frac{dh}{dt} \quad [33]$$

o, lo que es lo mismo:

$$A \frac{dh}{dt} + \frac{1}{2} C h_e^{-1/2} h = F_1 \quad [34]$$

o bien, dividiendo por el coeficiente de la variable de salida:

$$\tau \frac{dh}{dt} + h = K F_1 \quad [35]$$

siendo ahora la constante de tiempo, $\tau = 2Ah_e^{1/2}/C$ y la ganancia, $K = 2h_e^{1/2}/C$.

Aplicando la transformada de Laplace, la función de transferencia del sistema queda:

$$G(s) = \frac{h(s)}{F_1(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad [36]$$

Obsérvese de nuevo que el sistema es de primer orden, pero al ser no lineal la ecuación diferencial de partida, la constante de tiempo y la ganancia dependen de las condiciones de estado estacionario alrededor de los cuáles opera el sistema.

2.3.1.4 TANQUE AGITADO MEZCLA COMPLETA CON CAMISA DE CALEFACCION: PERTURBACIONES MULTIPLES

Considérese un tanque agitado encamisado, suponiendo que la resistencia térmica de la pared es despreciable y que la temperatura en toda la camisa es uniforme, tal como muestra la [Figura 7](#).

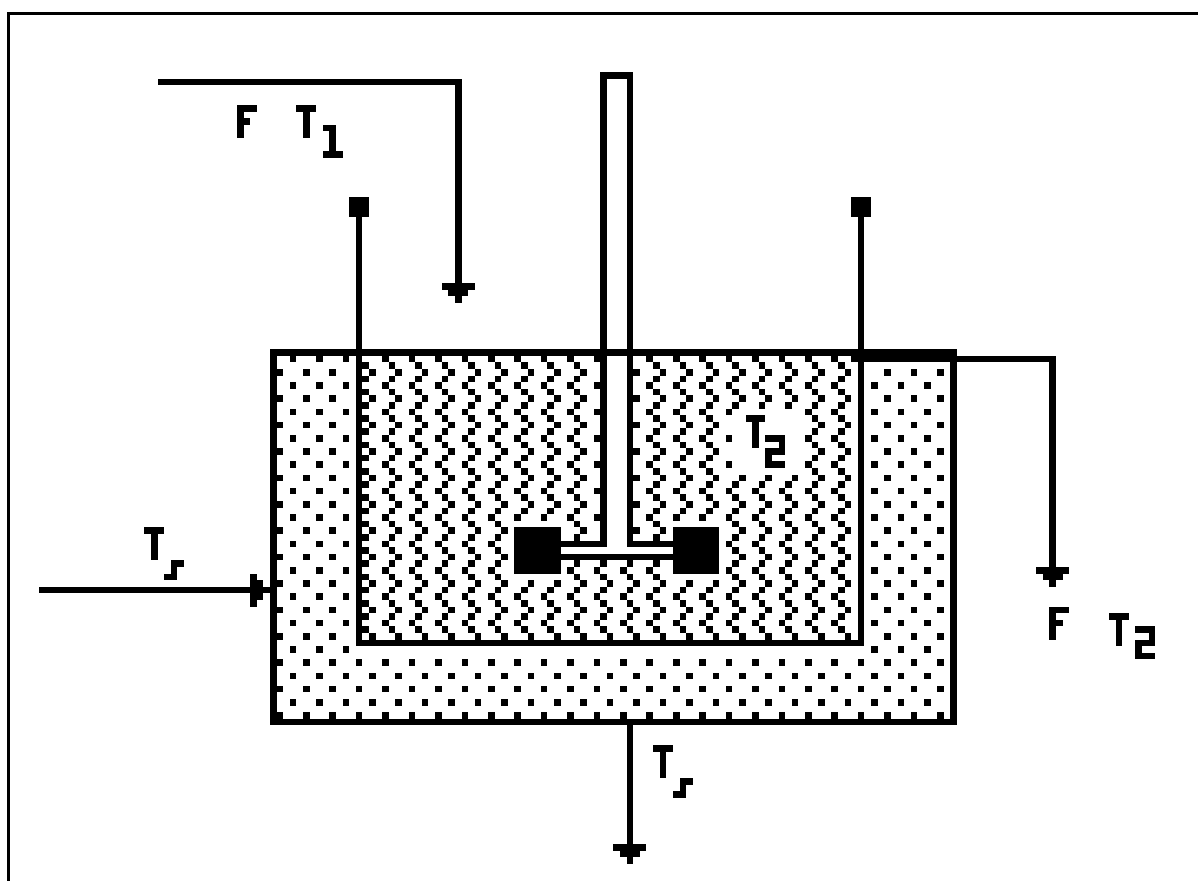


Figura 7 Tanque encamisado

La función de transferencia se obtendrá considerando que todos los valores de las variables son susceptibles de perturbación, lo que implicará tener tres variables de entrada (F , T_1 , T_s) y una de salida (T_2).

El balance de energía aplicado a los valores instantáneos de las variables dará la ecuación:

$$F_i \rho C_p T_{1i} + UA (T_{si} - T_{2i}) - F_i \rho C_p T_{2i} = MC_p \frac{dT_{2i}}{dt} \quad [37]$$

y, en estado estacionario:

$$F_e \rho C_p T_{1e} + UA (T_{se} - T_{2e}) - F_e \rho C_p T_{2e} = MC_p \frac{dT_{2e}}{dt} = 0 \quad [38]$$

Restando ambas ecuaciones:

$$\rho C_p (F_i T_{1i} - F_e T_{1e}) + UA (T_s - T_2) - \rho C_p (F_i T_{2i} - F_i T_{2e}) = MC_p \frac{dT_2}{dt} \quad [39]$$

donde ya se han considerado las correspondientes variables de perturbación.

Obsérvese, no obstante, que en la expresión [39] existen productos $F_i T_{in}$ no lineales, por lo que es necesaria su linealización, que será de la forma:

$$F_i T_{in} = F_e T_{en} + F_e (T_{in} - T_{en}) + T_{en} (F_i - F_e) \quad [40]$$

o bien:

$$F_i T_{in} - F_e T_{en} = F_e T_{en} + T_{en} F \quad [41]$$

Aplicando [41] a los correspondientes valores de [39] ésta queda:

$$\rho C_p F_e T_1 + \rho C_p T_{1e} F + UA T_s - UA T_2 - \rho C_p F_e T_2 - \rho C_p T_{2e} F = MC_p \frac{dT_2}{dt} \quad [42]$$

Reordenando y aplicando la transformada de Laplace:

$$\rho C_p F_e T_1 + U A T_s + \rho C_p (T_{1e} - T_2) F = (U A + \rho C_p F_e) T_2 + M C_p T_2 s \quad [43]$$

Dividiendo por el coeficiente de la variable de salida y llamando:

$$\tau = \frac{M C_p}{F_e \rho C_p U A} \quad [44]$$

$$K_1 = \frac{F_e \rho C_p}{F_e \rho C_p + U A} \quad [45]$$

$$K_2 = \frac{U A}{F_e \rho C_p + U A} \quad [46]$$

$$K_3 = \frac{\rho C_p (T_{1e} - T_{2e})}{F_e \rho C_p + U A} \quad [47]$$

se tendrá, finalmente:

$$K_1 T_1 + K_2 T_s + K_3 F = T_2 (1 + \tau s) \quad [48]$$

Si en [\[48\]](#) se supone que todas las variables de entrada menos una se mantienen constantes, es decir, las correspondientes variables de perturbación son nulas, se obtienen las funciones:

$$G_1 \frac{T_2(s)}{T_1(s)} = \frac{K_1}{\tau s + 1} \quad [49]$$

$$G_2 = \frac{T_2(s)}{T_s(s)} = \frac{K_2}{\tau s + 1} \quad [50]$$

$$G_3 = \frac{T_2(s)}{F(s)} = \frac{K_3}{\tau s + 1} \quad [51]$$

En este caso, la función de transferencia no es única y se puede considerar que la perturbación en la variable de salida es debida a tres contribuciones individuales de cada una de las variables de perturbación de entrada, es decir:

$$T_2 = G_1 T_1 + G_2 T_s + G_3 F \quad [52]$$

El diagrama de bloques que representa las relaciones funcionales en el sistema se muestra en la [Figura 8](#). La suma que presenta la ecuación [\[52\]](#) viene simbolizada por un círculo con los signos (+) escritos en el exterior.

Obsérvese que para un tanque agitado, la constante de tiempo para la respuesta de la temperatura es la misma para variaciones de temperatura de la alimentación, temperatura del vapor o caudal, pero las ganancias respecto al estado estacionario son diferentes para cada variable de entrada.

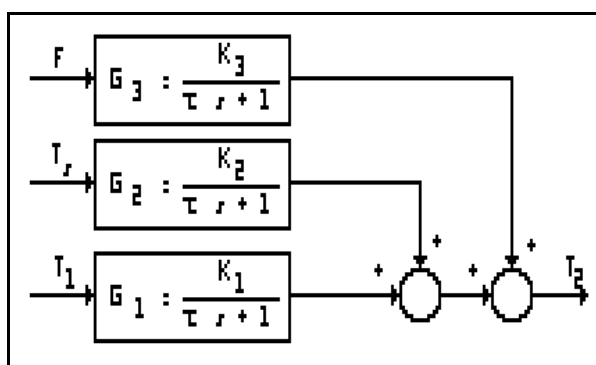


Figura 8 Diagrama de bloques de un tanque encamisado

Asimismo, el tanque agitado tiene una constante de tiempo para cambios de temperatura como la expresada por [\[44\]](#).

Nótese que, cuando el caudal es muy grande, $\tau \rightarrow M/F_e \rho = V/F_e$, es decir, el tiempo de residencia. A caudales bajos, la constante de tiempo tiende a $M C_p / U A$, valor idéntico al obtenido al analizar el termómetro de mercurio, que es un sistema similar sin flujo.

Es importante recordar finalmente, que la constante de tiempo para cambios de temperatura difiere generalmente de las obtenidas para cambios de concentración o nivel, ya que éstas frecuentemente son del mismo orden de magnitud que el tiempo de residencia.

2.3.2 SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN DE RETRASO

2.3.2.1 MANÓMETRO DE MERCURIO: ECUACION DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN

Supóngase un manómetro de mercurio como el esquematizado en la [Figura 9](#), sobre el que aumenta la presión, P .

En este caso el comportamiento dinámico viene descrito por una ecuación diferencial de segundo orden, resultado de un balance de fuerzas, y para simplificar se supondrá que todo el fluido se acelera de manera uniforme, que la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad y que todas las variables son de perturbación.

La fuerza total que actúa sobre el líquido, F_T , vendrá dada por el producto de la masa por la aceleración adquirida:

$$F_T = A L \rho \frac{d^2 h}{dt^2} \quad [53]$$

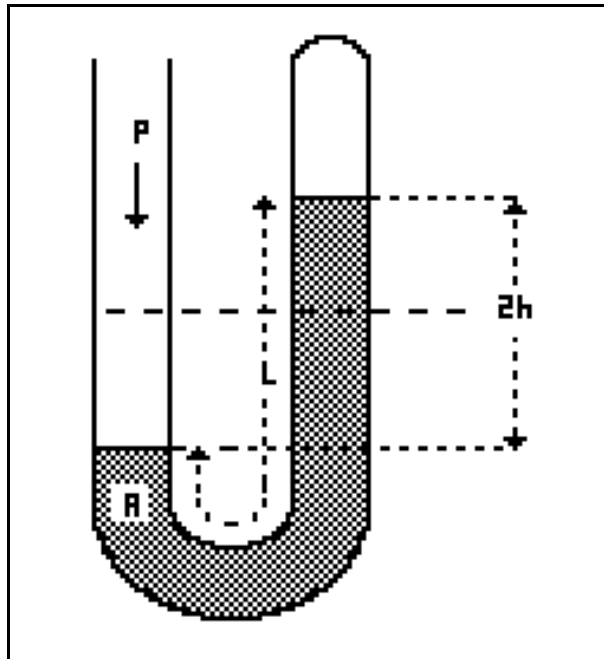


Figura 9 Manómetro de mercurio

donde L es la longitud bañada por el líquido, A es la sección del tubo y h la altura manométrica.

Esta fuerza será la resultante de otras tres que actúan sobre el líquido:

1) Fuerza debida a la presión:

$$F_p = P A \quad [54]$$

2) Peso de la columna líquida:

$$F_g = 2 A \rho g h \quad [55]$$

3) Fuerza de rozamiento:

$$F_r = \sigma A \frac{dh}{dt} \quad [56]$$

siendo σ el coeficiente de rozamiento.

El balance de fuerzas será:

$$F_T = F_p - F_g - F_r \quad [57]$$

o bien:

$$A L \rho \frac{d^2 h}{dt^2} = P A - 2 A \rho g h - \sigma A \frac{dh}{dt} \quad [58]$$

Si se expresa la presión de entrada en altura de líquido manométrico, h_i , es decir:

$$P = 2 \rho g h_i \quad [59]$$

la ecuación [58] queda de la forma, ya reordenada:

$$A L \rho \frac{d^2 h}{dt^2} + \sigma A \frac{dh}{dt} + 2 A \rho g h = 2 A \rho g h_i \quad [60]$$

que por aplicación de la transformada de Laplace queda:

$$L \rho h(s) s^2 + \sigma h(s) s + 2 \rho g h(s) = 2 \rho g h_i(s) \quad [61]$$

Dividiendo por el coeficiente de la variable de salida y operando:

$$\left(\frac{L}{2 g} s^2 + \frac{\sigma}{2 \rho g} s + 1 \right) h(s) = h_i(s) \quad [62]$$

con lo cual, la función de transferencia será:

$$G(s) = \frac{h(s)}{h_i(s)} = \frac{1}{\frac{L}{2 g} s^2 + \frac{\sigma}{2 \rho g} s + 1} = \frac{2 g/L}{s^2 + \frac{\sigma}{\rho L} s + \frac{2 g}{L}} \quad [63]$$

Ahora bien, generalmente se representa un sistema de segundo orden mediante la función de transferencia genérica:

$$G(s) = \frac{K \omega_o^2}{s^2 + 2 \gamma \omega_o s + \omega_o^2} \quad [64]$$

donde K es la ganancia del proceso, ω es la "**frecuencia natural no amortiguada**" (radianes/s) y γ es el "**coeficiente de amortiguamiento**", constantes, las dos últimas, ligadas al comportamiento físico del sistema y que permiten asimilar las características

de un sistema de segundo orden a una vibración amortiguada.

Así pues, identificando las ecuaciones [63] y [64], se tiene que:

$$K \omega_o = \frac{2 g}{L} \quad [65]$$

$$2 \gamma \omega_o = \frac{\sigma}{\rho L} \quad [66]$$

$$\omega_o^2 = \frac{2 g}{L} \quad [67]$$

lo que permite concluir que los parámetros del manómetro en estudio son:

$$K = 1 \quad [68]$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{2 g}{L}} \quad [69]$$

$$\gamma = \frac{\sigma}{2 \rho} \sqrt{\frac{1}{2 g L}} \quad [70]$$

Obsérvese que el manómetro presenta ganancia unidad, su frecuencia natural sólo depende de la longitud de la columna líquida y que, obviamente, el coeficiente de amortiguamiento es función del coeficiente de rozamiento del sistema.

2.3.2.2 TERMOMETRO Y SU ALOJAMIENTO: SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Considérese el sistema formado por un termómetro y su alojamiento, esquematizado en la [Figura 10](#), donde se han considerado despreciables las resistencias térmicas de las paredes.

El balance de energía del bulbo es idéntico al ya establecido por la ecuación [\[10\]](#), expresado como variables de perturbación:

$$U_2 A_2 (T_1 - T_2) = m_2 C_{p2} \frac{dT_2}{dt} \quad [71]$$

mientras que el balance de energía alrededor del alojamiento es, también expresado como variables de perturbación:

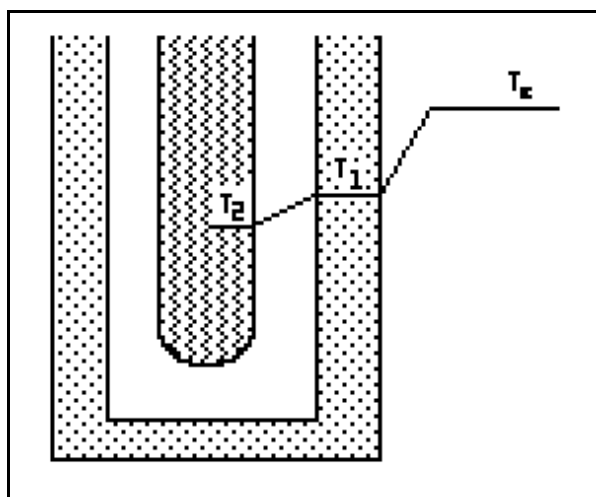


Figura 10 Termómetro y su alojamiento

$$U_1 A_1 (T_e - T_1) - U_2 A_2 (T_1 - T_2) = m_1 C_{p1} \frac{dT_1}{dt} \quad [72]$$

ya que existen entrada y salida de energía.

Se tiene así un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, de entre las que hay que eliminar T_1 para relacionar la variable de salida, T_2 , con la de entrada, T_e . La manera más sencilla es operar con las funciones transformadas. Así, la ecuación [\[71\]](#) se puede poner de la forma:

$$U_2 A_2 T_1(s) = U_2 A_2 T_2(s) + m_2 C_{p2} T_2(s) s \quad [73]$$

Dividiendo por el coeficiente de la variable de salida y definiendo la constante

de tiempo como:

$$\tau_2 = \frac{m_2 C_{p2}}{U_2 A_2} \quad [74]$$

quedará:

$$T_1(s) = (1 + \tau_2 s) T_2(s) \quad [75]$$

lo que permitirá definir una función de transferencia de la forma:

$$\frac{T_2(s)}{T_1(s)} = \frac{1}{\tau_2 s + 1} \quad [76]$$

Por otro lado, aplicando la transformada de Laplace a la ecuación [\[72\]](#) y reordenando sus términos, se obtiene:

$$U_1 A_1 T_e(s) + U_2 A_2 T_2(s) = (U_1 A_1 + U_2 A_2) T_1(s) + m_1 C_{p1} T_1(s) s \quad [77]$$

Como en esta ecuación la variable de salida es T_1 , dividiendo por su coeficiente se podrán definir las constantes:

$$\tau_1 = \frac{m_1 C_{p1}}{U_1 A_1 + U_2 A_2} \quad [78]$$

$$K_1 = \frac{U_1 A_1}{U_1 A_1 + U_2 A_2} \quad [79]$$

$$K_2 = \frac{U_2 A_2}{U_1 A_1 + U_2 A_2} \quad [80]$$

con lo cual la ecuación [77] quedará de la forma:

$$K_1 T_e(s) + K_2 T_2(s) = (1 + \tau_1 s) T_1(s) \quad [81]$$

Dividiendo esta expresión por T y sustituyendo en la ecuación resultante la [76], se llega a:

$$K_1 \frac{T_e(s)}{T_2(s)} + K_2 = (\tau_1 s + 1) (\tau_2 s + 1) \quad [82]$$

de donde se puede despejar la función de transferencia global del sistema de la forma:

$$G(s) = \frac{T_2(s)}{T_e(s)} = \frac{K_1}{(\tau_1 s + 1) (\tau_2 s + 1) - K_2} \quad [83]$$

Función de transferencia que muestra la interacción de dos sistemas de primer orden con tres términos que relacionan a ambos: K_1 , K_2 y τ_1 .

Obsérvese que si $U_1 A_1 \gg U_2 A_2$, se tendrá que:

$$K_1 \approx 1 \quad [84]$$

$$K_2 \approx 0 \quad [85]$$

$$\tau_1 \approx \frac{m_1 C_{p1}}{U_1 A_1} \quad [86]$$

es decir, dos sistemas de primer orden en serie sin interacción entre ellos y de ganancia unidad.

Por otro lado, operando en [83]:

$$s) = \frac{T_2(s)}{T_e(s)} = \frac{K_1}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2) s + (1 - K_2)} = \frac{K_1 / \tau_1 \tau_2}{s^2 + \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} s + \frac{K_1}{\tau_1 \tau_2}} \quad [87]$$

ya que $K_1 + K_2 = 1$.

Identificando esta expresión con la ecuación general del sistema de segundo orden, [64], se obtienen los siguientes parámetros para el sistema en estudio:

$$K = 1 \quad [88]$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{K_1}{\tau_1 \tau_2}} \quad [89]$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{K_1}} \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \quad [90]$$

2.3.3 TIEMPO MUERTO

En muchos procesos se producen retrasos en la transmisión de señales. Como ejemplo, considérese un fluido que circula por una tubería en flujo de pistón.

Supóngase que una variable que varía con el tiempo, $r(t)$ se desea medir a la salida de una sección del tubo considerada, siendo el valor de aquella en ese punto $c(t)$, tal como muestra la [Figura 11](#).

Si operando en régimen estacionario se produce una perturbación en $r(t)$ a $t = 0$, el cambio no se detectará al final del tubo hasta un tiempo después, sien-

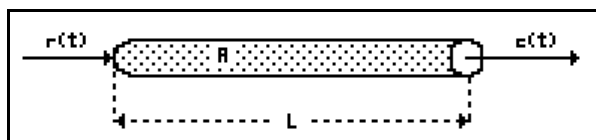


Figura 11 Sistema con tiempo muerto

do $\tau = A.L/q$ el tiempo de residencia del fluido en la sección de tubo considerada.

De la [Figura 11](#) se deduce que la relación entre ambos valores de la variable es:

$$c(t) = r(t - \tau) \quad [91]$$

Aplicando transformadas de Laplace se llega a la ecuación:

$$C(s) = e^{-\tau s} R(s) \quad [92]$$

con lo cual la función de transferencia de este sistema será:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = e^{-\tau s} \quad [93]$$

Obsérvese que el tiempo muerto es muy común en los procesos en los que se produce circulación de fluidos por tuberías y, como se verá más adelante, hace mucho más difícil el control de los mismos.

CAPITULO 3

ANALISIS TEMPORAL DE SISTEMAS DE LAZO ABIERTO

3.1 OBJETIVOS	2
3.2 METODOS DE ANALISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO	3
3.3 FUNCIONES DE EXCITACION	4
3.3.1 IMPULSO UNIDAD	5
3.3.2 ESCALON UNIDAD	6
3.3.3 RAMPA UNIDAD	7
3.3.4 PARABOLA UNIDAD	7
3.4 ANALISIS TEMPORAL DE SISTEMAS DE PRIMER ORDEN	8
3.4.1 RESPUESTA A IMPULSO	8
3.4.2 RESPUESTA A ESCALON	10
3.4.3 RESPUESTA A RAMPA	12
3.4.4 COMPARACION DE LAS RESPUESTAS	14
3.5 ANALISIS TEMPORAL DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN	15
3.5.1 ESTUDIO PREVIO DE LA ECUACION CARACTERISTICA DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA	15
3.5.2 RESPUESTA A IMPULSO	17
3.5.2.1 SISTEMA SUBAMORTIGUADO	17
3.5.2.2 SISTEMA CRITICAMENTE AMORTIGUADO	19
3.5.2.3 SISTEMA SOBREAMORTIGUADO	20
3.5.3 RESPUESTA A ESCALON	22

DINAMICA DE SISTEMAS, SIMULACION Y CONTROL

Capítulo 3

3.5.3.1 SISTEMA SUBAMORTIGUADO	<u>22</u>
3.5.3.2 SISTEMA CRITICAMENTE AMORTIGUADO	<u>23</u>
3.5.3.3 SISTEMA SOBREAMORTIGUADO	<u>24</u>
3.5.4 CONSIDERACIONES SOBRE LOS SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN	<u>25</u>

3.1 OBJETIVOS

En el Capítulo 2 se ha visto la forma de obtener un modelo lineal de un sistema físico concreto. Dicho modelo plasma en forma matemática el comportamiento del sistema ante señales de excitación aplicadas a su entrada. En este capítulo se mostrarán algunos métodos de cálculo que permiten, conocido el modelo matemático del sistema, realizar el análisis de su comportamiento dinámico.

Los objetivos fundamentales del análisis dinámico de un sistema son el estudio de su estabilidad, de su respuesta en régimen transitorio y de su precisión en régimen permanente. Para efectuar el análisis se utilizan básicamente los métodos denominados **"análisis en el dominio del tiempo"** y **"análisis en el dominio de la frecuencia"**.

El análisis en el dominio del tiempo es directo y se apoya en la solución de la ecuación diferencial del sistema para hallar las respuestas correspondientes al régimen transitorio y al permanente. Este método utiliza como señales de excitación determinadas funciones del tiempo, que además de permitir juzgar sobre el comportamiento del sistema, ofrecen la posibilidad de realizar una comparación entre sistemas de diferentes características, analizando las respectivas respuestas a las mencionadas señales de prueba.

El análisis en el dominio de la frecuencia utiliza como excitación una señal senoidal de frecuencia variable, determinando el comportamiento del sistema a partir de su respuesta frecuencial. En este método no es necesario ocuparse de la solución de la ecuación diferencial del sistema, ni de trasladar los resultados obtenidos en el dominio de la frecuencia al dominio del tiempo para poder juzgar sobre el comportamiento del mismo.

El análisis en el dominio del tiempo se llevará a cabo en este capítulo para los sistemas de lazo abierto ya estudiados. En el capítulo siguiente se acometerá el análisis en el dominio de la frecuencia de los mismos sistemas. Entre ambos métodos existe una correlación directa que, una vez conocida o definida en forma matemática, permite utilizar ventajosamente los resultados obtenidos en uno de ellos para deducir los equivalentes en el otro método alternativo.

3.2 METODOS DE ANALISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Para realizar el análisis del comportamiento de un sistema ante una excitación, es necesario conocer detalladamente su "**respuesta temporal**", entendiendo como tal, la variación en función del tiempo de la señal de salida del sistema cuando es aplicada una señal de entrada específica. Dicha respuesta temporal puede obtenerse fundamentalmente a través de dos métodos.

El primero de ellos actúa directamente en el dominio del tiempo, sometiendo previamente el sistema a una entrada de tipo impulso con el fin de obtener su "**respuesta impulsional**". Conocida ésta, puede calcularse de forma inmediata la respuesta del sistema ante una señal cualquiera de excitación.

El otro método actúa en el dominio de Laplace, obteniendo primero la función de transferencia del sistema que, adecuadamente preparada, permite calcular la respuesta temporal por simple aplicación de la transformada inversa de Laplace. En este método suelen utilizarse como excitación señales típicas normalizadas como las funciones escalón, rampa o parábola entre las no periódicas, y la función senoidal entre las periódicas. Tal medida permite establecer una comparación entre sistemas teóricamente diferentes, cotejando sus respuestas ante la misma señal de entrada.

La respuesta temporal de un sistema consta, en general, de dos partes: una respuesta transitoria y una respuesta en régimen permanente, de forma que si se designa por $C(t)$ la respuesta temporal, se puede poner:

$$C(t) = C_{rt}(t) + C_{rp}(t) \quad [1]$$

siendo $C_{rt}(t)$ la respuesta transitoria y $C_{rp}(t)$ la respuesta en régimen permanente.

Como respuesta transitoria se considera aquella parte de la respuesta temporal que tiende a anularse a medida que va transcurriendo el tiempo, con lo que resulta:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_{rt}(t) = 0 \quad [2]$$

Lógicamente se definirá como respuesta en régimen permanente a la que se obtiene cuando ha transcurrido un dilatado período de tiempo desde que se aplicó la señal de excitación, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = C_{rp} \quad [3]$$

La respuesta en régimen transitorio caracteriza fundamentalmente el comportamiento dinámico del sistema: estabilidad, rapidez, etc. La respuesta en régimen permanente, por el contrario, da una idea de la precisión del mismo y sirve de base para calcular el error entre la entrada y la salida, pasado el régimen transitorio, una vez que el sistema se halla en estado de equilibrio. Lógicamente, si el sistema es inestable no habrá respuesta en régimen permanente propiamente dicha; existirá solamente una respuesta, que es la transitoria.

3.3 FUNCIONES DE EXCITACION

Las señales de excitación que puedan actuar sobre los sistemas varían según la aplicación a que éstos estén destinados. Algunos sistemas reciben señales cuya variación con el tiempo es relativamente lenta; otros, por el contrario, están sometidos a variaciones rápidas de la señal de entrada o incluso a señales de tipo aleatorio. En general, puede decirse que si la entrada no presenta excesivas variaciones en la unidad de tiempo puede ser representada analíticamente por una expresión del tipo:

$$r(t) = r_0 + r_1 t + r_2 t^2 \quad [4]$$

lo que conduce a considerar como señales de entrada normalizadas las que representan cada uno de sus términos. El término r_0 representa una función escalón de desplazamiento, el término $r_1 t$ una función rampa o escalón de velocidad y el término $r_2 t^2$ una función parabólica o escalón de aceleración.

Junto con estas señales cabe destacar otros dos casos extremos: el impulso o función delta de Dirac, como límite de un escalón, y la señal senoidal de frecuencia

variable, que permite realizar estudios en el dominio de la frecuencia.

A continuación se estudiarán los significados físico y matemático de las señales normalizadas citadas, excepto la señal senoidal, que se estudiará en el Capítulo 4.

3.3.1 IMPULSO UNIDAD

El impulso unidad, $\delta(t)$, se define como la función delta de Dirac, un pulso (función que comienza y termina en el mismo nivel) de altura infinita y anchura, ϵ , tendiendo a cero, cuya área es siempre igual a la unidad ([Figura 1](#)), es decir:

$$\delta(t) = \frac{1}{\epsilon} \quad (0 \leq t \leq \epsilon) \quad [5]$$

$$\delta(t) = 0 \quad (t > \epsilon) \quad [6]$$

Este tipo de excitación es, evidentemente, una idealización matemática, ya que físicamente resulta imposible generar un impulso de este tipo. Sin embargo, resulta una herramienta matemática muy útil, ya que puede físicamente ser utilizado como tal un impulso de muy corta duración en comparación con las constantes de tiempo del sistema más significativas.

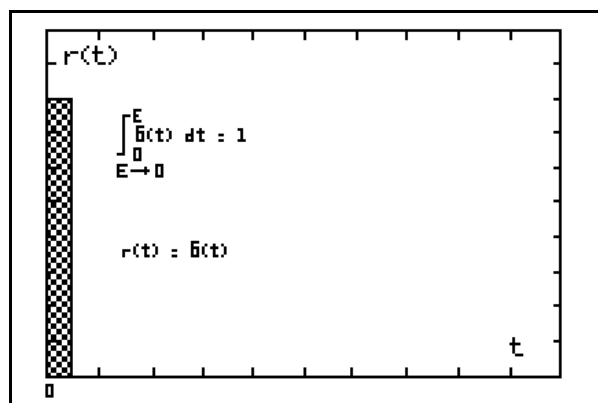


Figura 1 Impulso unidad

Asimismo, se puede demostrar que la transformada de Laplace del impulso unidad es:

$$\delta(s) = 1 \quad [7]$$

lo que significa que para hallar la respuesta temporal del sistema a este tipo de excitación basta calcular la inversa de la transformada de Laplace de la función de transferencia del sistema.

3.3.2 ESCALON UNIDAD

El escalón unidad, $u(t)$, representado en la [Figura 2](#), es una función de excitación que cambia instantáneamente del nivel cero al nivel unidad, y luego permanece constante, es decir:

$$u(t) = 0 \quad (t \leq 0) \quad [8]$$

$$u(t) = 1 \quad (t > 0) \quad [9]$$

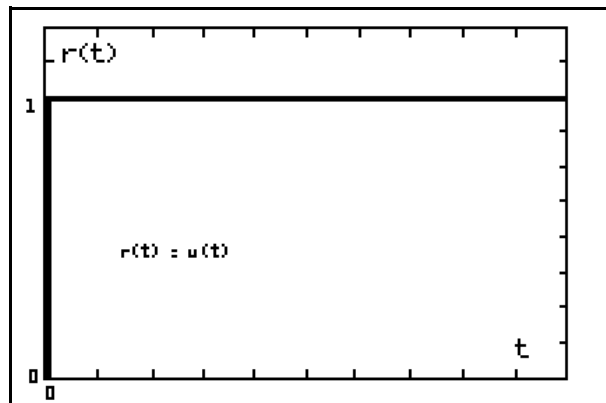


Figura 2 Escalón unidad

Una perturbación de este tipo también es una idealización matemática, ya que la variación física podría ser muy rápida pero nunca instantánea. Sin embargo, se utiliza la definición dada porque es más fácil de tratar como forma matemática normalizada y además porque representa un cambio más rápido que el que puede realizarse físicamente, con lo cual los resultados y características del sistema real serán superiores a los obtenidos teóricamente.

La transformada de Laplace de esta excitación sería:

$$u(s) = \frac{1}{s} \quad [10]$$

3.3.3 RAMPA UNIDAD

La función rampa unidad, $r(t)$, es aquélla que varía linealmente con el tiempo, siendo su pendiente la unidad, ([Figura 3](#)), es decir:

$$r(t) = 0 \quad (t \leq 0) \quad [11]$$

$$r(t) = t \quad (t > 0) \quad [12]$$

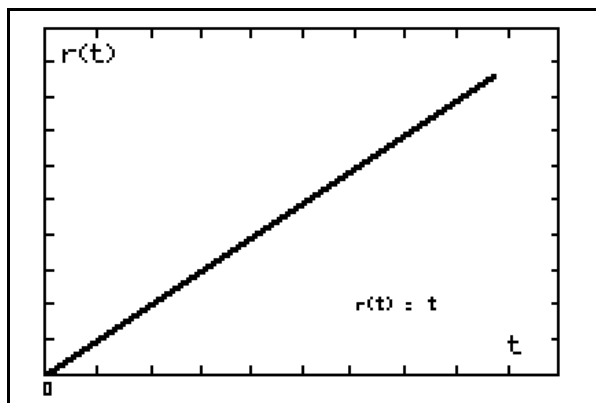


Figura 3 Rampa unidad

Como es evidente, la derivada con respecto al tiempo de la rampa equivale al escalón, con lo cual se puede identificar ésta como un escalón de velocidad, que tampoco tiene significado físico real, al ser imposible una variación instantánea de la velocidad desde cero a un valor finito.

La transformada de Laplace de esta función de excitación será:

$$r(s) = - \frac{1}{s^2} \quad [13]$$

3.3.4 PARABOLA UNIDAD

La excitación de tipo parabólico con pendiente unidad, $p(t)$, o escalón de aceleración, correspondería a una variación instantánea de la aceleración desde el valor cero a otro valor constante. Expresada de manera directa en función del tiempo, corresponde a la señal repre-

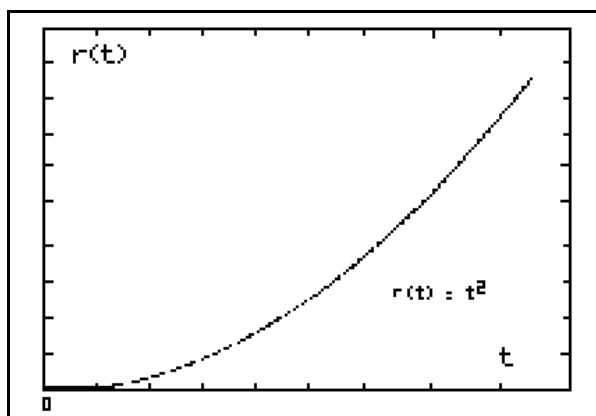


Figura 4 Parábola unidad

sentada en la [Figura 4](#) y definida de la forma:

$$p(t) = 0 \quad (t \leq 0) \quad [14]$$

$$p(t) = t^2 \quad (t > 0) \quad [15]$$

Según lo dicho, la derivada de esta función con respecto al tiempo sería la rampa, o escalón de velocidad, y lógicamente, su derivada segunda sería la función escalón.

Aunque este tipo de perturbación aparece raramente en los estudios de dinámica de sistemas, su transformada de Laplace es:

$$p(s) = \frac{2}{s^3} \quad [16]$$

3.4 ANALISIS TEMPORAL DE SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Una vez conocidas las características dinámicas de los sistemas de primer orden y de las funciones de excitación, se estudiarán a continuación las características de las respuestas obtenidas al excitar estos sistemas con las funciones elementales estudiadas.

3.4.1 RESPUESTA A IMPULSO

Como se vió en el capítulo anterior, la función general de transferencia

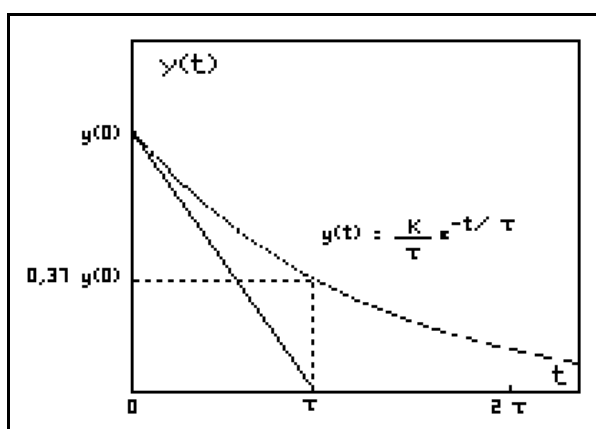


Figura 5 Respuesta de un sistema de primer orden a un impulso unitario

de un sistema de primer orden es:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad [17]$$

mientras que la transformada de Laplace del impulso unidad es:

$$X(s) = 1 \quad [18]$$

Sustituyendo [18] en [17] se obtiene la salida o respuesta del sistema en el dominio de Laplace:

$$Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad [19]$$

o bien, reordenando para poder aplicar la transformada:

$$Y(s) = \frac{\frac{K}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} \quad [20]$$

cuya transformada inversa y, por tanto, el valor de la señal de salida en el dominio del tiempo será:

$$Y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad [21]$$

ecuación que corresponde a un exponencial cuya ordenada en el origen es $Y(0) = K/\tau$ y en la cual, haciendo $t = \tau$ resulta:

$$Y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-1} = 0,37 \quad Y(0) = 0,37 \frac{K}{\tau} \quad [22]$$

La ecuación [21] está representada en la [Figura 5](#) y en ella puede verse como la constante τ , la constante de tiempo del sistema, representa el tiempo que tarda el mismo en alcanzar el 37 % del valor inicial de la respuesta a un impulso.

3.4.2 RESPUESTA A ESCALON

En este caso, al ser la transformada de Laplace del escalón de entrada:

$$X(s) = \frac{1}{s} \quad [23]$$

La transformada de la señal de salida, obtenida sustituyendo [23] en la ecuación de la función de transferencia del sistema, [17] será:

$$Y(s) = \frac{K}{(\tau s + 1) s} \quad [24]$$

Descomponiendo en fracciones parciales:

$$\frac{K}{(\tau s + 1) s} = \frac{K/\tau}{s (s + 1/\tau)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s + 1/\tau} \quad [25]$$

de donde se puede obtener fácilmente (tomando las raíces $s = 0$ y $s = -1/\tau$) que:

$$C_1 = K \quad [26]$$

$$C_2 = -K \quad [27]$$

y la ecuación [24] queda de la forma:

$$Y(s) = K \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau} \right) \quad [28]$$

Aplicando la transformada inversa:

$$Y(t) = K (1 - e^{-t/\tau}) \quad [29]$$

El término constante corresponde a la respuesta en régimen permanente y el exponencial a la respuesta transitoria.

La ecuación [29] ha sido representada en la **Figura 6**; en ella puede verse que inicialmente la salida es cero

creciendo después de forma exponencial hasta tender asintóticamente al valor K. La constante K es, por tanto, la amplitud de la señal de salida cuando la señal de entrada varía en una unidad, por lo cual se denomina "**ganancia estática**" del sistema de primer orden.

Haciendo en la ecuación [29] $t = \tau$, se tiene:

$$Y(t) = K (1 - e^{-1}) = 0,632 K \quad [30]$$

o sea, que la constante de tiempo del sistema, t , corresponde al tiempo necesario para que la respuesta al escalón alcance el 63,2 % de su valor final. Así, cuanto más pequeña sea la constante de tiempo, más rápida será la respuesta del mismo.

Por otro lado, la pendiente en el origen de la respuesta será;

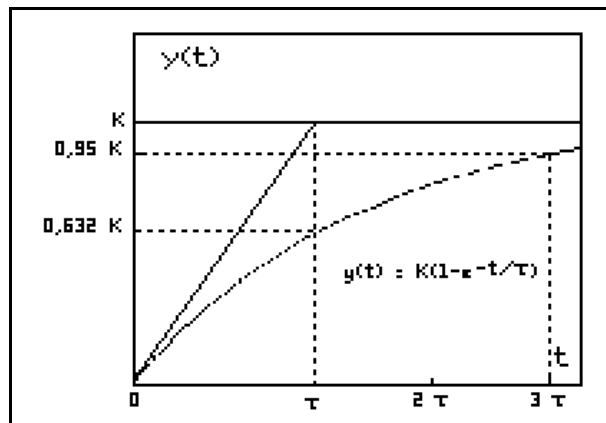


Figura 6 Respuesta de un sistema de primer orden a un escalón unitario

$$\left(\frac{dY(t)}{dt} \right)_{t=0} = \left(\frac{K}{\tau} e^{-t/\tau} \right)_{t=0} = \frac{K}{\tau} \quad [31]$$

luego también se puede definir la constante de tiempo como el tiempo que necesitaría el sistema para alcanzar el valor final K , si mantuviera su velocidad inicial de respuesta (ver [Figura 6](#)).

Finalmente, aunque la salida no alcanza el nuevo estado estacionario más que en un tiempo infinito, se suele definir el denominado "**tiempo de establecimiento**" t_s , como aquél que tarda la respuesta en entrar y permanecer en una zona de un 5 % en torno a su valor de equilibrio. Así pues, el tiempo de establecimiento podrá calcularse haciendo $Y(t) = 0,95 K$, con lo cual:

$$0,95 K = K (1 - e^{-t_s/\tau}) \quad [32]$$

de donde:

$$t_s = 2,99 \tau \quad [33]$$

valor que asimismo se ha indicado en la [Figura 6](#).

3.4.3 RESPUESTA A RAMPA

La transformada de Laplace de la rampa unidad de entrada es:

$$X(s) = \frac{1}{s^2} \quad [34]$$

con lo que la señal de salida, obtenida a

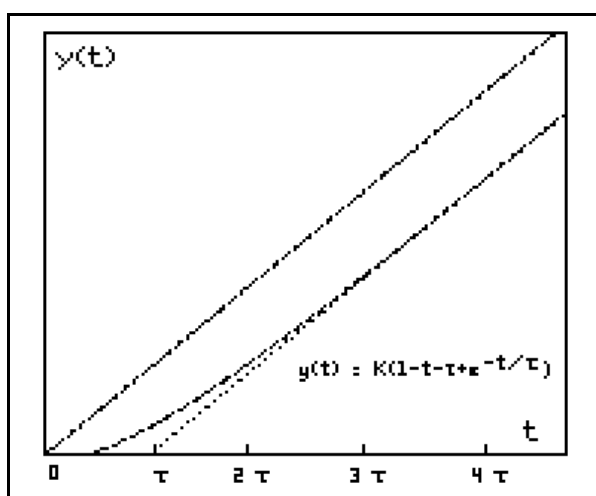


Figura 7 Respuesta de un sistema de primer orden a una rampa unidad

través de la función de transferencia en el dominio de Laplace será:

$$Y(s) = \frac{K}{(\tau s + 1) s^2} \quad [35]$$

Descomponiendo en fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{K/\tau}{(s + 1/\tau) s^2} = \frac{C_1}{s + 1/\tau} = \frac{C_1}{s + 1/\tau} + \frac{C_2}{s^2} + \frac{C_3}{s} \quad [36]$$

y calculando las constantes con ayuda de las raíces $s = 0$, $s = -1/\tau$ y la derivada para $s = 0$, se obtiene para aquéllas:

$$C_1 = K \tau \quad [37]$$

$$C_2 = K \quad [38]$$

$$C_3 = -K \tau \quad [39]$$

quedando [\[36\]](#) de la forma:

$$Y(s) = \frac{K}{s + 1/\tau} + \frac{K}{s^2} - \frac{K \tau}{s} \quad [40]$$

cuya transformada inversa es:

$$Y(t) = K \tau e^{-t/\tau} + K t - K \tau \quad [41]$$

o bien:

$$Y(t) = K(t - \tau) + K\tau e^{-t/\tau} \quad [42]$$

El primer término de [42] corresponde a la respuesta en régimen permanente del sistema y el término exponencial a la respuesta transitoria. Obsérvese que, a pesar de que el sistema es estable, el valor de la salida se hace infinito para $t \rightarrow \infty$. Ello muestra que una salida infinita en régimen permanente no quiere decir que el sistema sea necesariamente inestable, y que no es aconsejable utilizar la respuesta en régimen permanente como criterio para determinar la estabilidad de un sistema. La ecuación [42] está representada en la [Figura 7](#).

Obsérvese que para $t \gg \tau$, el término exponencial de la ecuación [42] tiende a cero, convirtiéndose ésta en:

$$Y(t) = K(t - \tau) \quad [43]$$

y si el sistema tiene ganancia unidad, esta expresión queda de la forma:

$$Y(t) = t - \tau \quad [44]$$

lo que indica que el sistema responde con un retardo en tiempo igual a τ .

3.4.4 COMPARACION DE LAS RESPUESTAS

El sistema excitado con una rampa responde con un retardo en tiempo igual a τ , dando por tanto un error en la respuesta de régimen permanente. Analizando las respuestas al escalón y al impulso se puede observar que ello no sucede.

Con respecto a las respuestas transitorias, se puede observar que la respuesta al escalón es la derivada con respecto al tiempo de la respuesta a la rampa. Por otra parte, la respuesta al impulso es la derivada de la respuesta al escalón. Teniendo en

cuenta que la función escalón puede tomarse como la derivada de la función rampa y el impulso como la derivada de la función escalón, resulta que la respuesta a la derivada de una determinada señal de entrada puede obtenerse derivando la respuesta del sistema a la señal primitiva.

3.5 ANALISIS TEMPORAL DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Dentro de las técnicas de control los sistemas de segundo orden tienen una gran importancia, pues el comportamiento dinámico de numerosos sistemas de control de uso muy frecuente está caracterizado por ecuaciones diferenciales de tal orden. A ello se une también la circunstancia de que gran parte de las técnicas utilizadas para el diseño de sistemas de regulación están basadas en el análisis de los sistemas de segundo orden.

Incluso los sistemas de orden superiores al segundo, que con cierta frecuencia aparecen en la práctica, pueden ser sustituidos por un sistema aproximado de segundo orden para obtener una primera solución con vistas a un diseño preliminar de los mismos. Posteriormente, la solución más depurada se obtiene partiendo del comportamiento del sistema de segundo orden.

Además, para los sistemas de segundo orden se establecen una serie de definiciones de parámetros característicos que normalmente son utilizados de forma general para cualquier otro sistema.

3.5.1 ESTUDIO PREVIO DE LA ECUACION CARACTERISTICA DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA

Como se ha visto en el capítulo anterior, la función de transferencia de un sistema de segundo orden tiene la forma:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K \omega_o^2}{s^2 + 2 \gamma \omega_o s + \omega_o^2} \quad [45]$$

siendo su ecuación característica:

$$s^2 + 2 \gamma \omega_o s + \omega_o^2 = 0 \quad [46]$$

Esta ecuación de segundo grado tiene dos raíces (polos), cuya naturaleza depende del valor del parámetro γ , supuesto que éste y ω son positivos, como es el caso para los sistemas físicos:

$$s_1 = -\gamma \omega_o + j \omega_o \sqrt{1 - \gamma^2} \quad [47]$$

$$s_2 = -\gamma \omega_o - j \omega_o \sqrt{1 - \gamma^2} \quad [48]$$

Si se mantiene constante el valor de ω_o y se hace variar γ entre cero e infinito, la situación de las raíces variará, dándose los casos significativos siguientes:

a) $\gamma < 1$

Las raíces serán complejas conjugadas, dándose el caso particular, para $\gamma = 0$, que las raíces son imaginarias conjugadas. Ello significa, como se verá más adelante, que todas las curvas de respuesta serán de naturaleza oscilatoria; se dice en este caso que el sistema está "**subamortiguado**", dándose el caso límite de un "**sistema sin amortiguamiento**" cuando $\gamma = 0$.

b) $\gamma = 1$

En este caso existe una raíz real doble, que produce una respuesta no oscilatoria. Se dice que el sistema está "**críticamente amortiguado**".

c) $\gamma > 1$

La ecuación característica tiene dos raíces reales, dando lugar a una respuesta

oscilatoria cuya amplitud disminuye con el tiempo. En este caso se considera que el sistema está "**sobreamortiguado**".

3.5.2 RESPUESTA A IMPULSO

La respuesta a un impulso de un sistema de segundo orden con una función de transferencia dada por la expresión [45] será, según se ha visto para los sistemas de primer orden, la transformada de Laplace inversa de dicha expresión. Como el valor de γ puede variar, se estudiarán separadamente las respuestas de los casos significativos definidos en el apartado anterior.

3.5.2.1 SISTEMA SUBAMORTIGUADO

En este caso, al ser $\gamma < 1$, las raíces de la ecuación característica son complejas y conjugadas (ecuaciones [47] y [48]), con lo cual la función de transferencia se puede poner de la forma:

$$Y(s) = \frac{K \omega_o^2}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{K \omega_o^2}{(s + \gamma \omega_o)^2 + \omega_o^2 (1 - \gamma)^2} \quad [49]$$

o bien:

$$Y(s) = \frac{K \omega_o^2}{\omega_o \sqrt{1 - \gamma^2}} \cdot \frac{\omega_o \sqrt{1 - \gamma^2}}{(s + \gamma \omega_o)^2 + \omega_o^2 (1 - \gamma^2)} \quad [50]$$

expresión de la forma:

$$Y(s) = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2} \quad [51]$$

cuya transformada inversa de Laplace es:

$$Y(t) = e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\omega t) \quad [52]$$

Así pues, se obtiene la respuesta en el dominio del tiempo de la forma:

$$Y(t) = \frac{K \omega_o^2}{\omega_o \sqrt{1 - \gamma^2}} e^{-\gamma \omega_o t} \operatorname{sen}(\omega_o \sqrt{1 - \gamma^2} t) \quad [53]$$

o bien, simplificando:

$$Y(t) = K \frac{\omega_o^2}{\sqrt{1 - \gamma^2}} e^{-\gamma \omega_o t} \operatorname{sen}(\omega_o \sqrt{1 - \gamma^2} t) \quad [54]$$

Esta ecuación corresponde a una senoide amortiguada de frecuencia ω_o . Al parámetro γ y ω_o , se le denomina "**factor de amortiguamiento**" o "**factor de decrecimiento**", porque indica el ritmo con que decrece la amplitud de la oscilación. Lógicamente, cuanto mayor sea el valor de este factor, más rápidamente se amortiguará la respuesta del sistema. Asimismo se define la "**frecuencia amortiguada del sistema**", ω_d , como:

$$\omega_d = \omega_o \sqrt{1 - \gamma^2} \quad [55]$$

Obsérvese que ω_d varía con γ entre los valores cero y ω_o y que, por tanto, la presencia del amortiguamiento repercute decisivamente sobre la respuesta, modificando tanto su amplitud como la frecuencia de las oscilaciones.

En el caso particular de que $\gamma = 0$ el sistema no posee amortiguamiento, ya que las raíces de la ecuación característica son imaginarias y conjugadas, es decir:

$$s_1 = j \omega_o \quad [56]$$

$$s_2 = -j \omega_o \quad [57]$$

con lo que la respuesta en el dominio de Laplace será:

$$Y(s) = \frac{K \omega_o^2}{(s + j \omega_o)(s - j \omega_o)} = \frac{K \omega_o^2}{s^2 + \omega_o^2} \quad [58]$$

y, por tanto, la respuesta temporal:

$$Y(t) = K \omega_o \text{sen}(\omega_o t) \quad [59]$$

que corresponde a una senoide de amplitud $K \omega_o$ y de frecuencia ω_o , es decir, no amortiguada.

3.5.2.2 SISTEMA CRITICAMENTE AMORTIGUADO

Cuando el coeficiente de amortiguamiento es igual a la unidad se dice que el sistema actúa con amortiguamiento crítico. En tal caso, existe solamente una raíz real doble, cuyo valor viene dado por la expresión:

$$s_1 = s_2 = -\omega_o \quad [60]$$

La función de transferencia resulta ser ahora:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K \omega_o^2}{(s + \omega_o)^2} \quad [61]$$

y como para el impulso unitario $X(s) = 1$, aplicando la transformada de Laplace inversa,

se obtiene para la respuesta temporal:

$$Y(t) = K \omega_o^2 t e^{-\omega_o t} \quad [62]$$

respuesta que, como se puede observar, no presenta oscilaciones.

3.5.2.3 SISTEMA SOBREAMORTIGUADO

Para este caso, en el que $\gamma > 1$, las dos raíces de la ecuación característica serán reales y negativas, es decir:

$$s_1 = -\gamma \omega_o + \omega_o \sqrt{\gamma^2 - 1} \quad [63]$$

$$s_2 = -\gamma \omega_o - \omega_o \sqrt{\gamma^2 - 1} \quad [64]$$

con lo que la respuesta del sistema en el dominio de Laplace será:

$$Y(s) = \frac{K \omega_o^2}{\left(s + \gamma \omega_o - \omega_o \sqrt{\gamma^2 - 1}\right) \left(s + \gamma \omega_o + \omega_o \sqrt{\gamma^2 - 1}\right)} \quad [65]$$

que descompuesta en dos fracciones resulta:

$$Y(s) = \frac{C_1}{s + \gamma \omega_o - \omega_o \sqrt{\gamma^2 - 1}} + \frac{C_2}{s + \gamma \omega_o + \omega_o \sqrt{\gamma^2 - 1}} \quad [66]$$

El valor de las constantes C_1 y C_2 se obtiene por el método habitual, resultando ser:

$$C_1 = \frac{K \omega_o}{2\sqrt{\gamma^2 - 1}} \quad [67]$$

$$C_2 = \frac{-K \omega_o}{2\sqrt{\gamma^2 - 1}} \quad [68]$$

La respuesta en el dominio del tiempo será, pues:

$$Y(t) = \frac{K \omega_o}{2\sqrt{\gamma^2 - 1}} \left(e^{+\omega_o(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1})t} - e^{-\omega_o(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1})t} \right) \quad [69]$$

ecuación que también se puede escribir de la forma:

$$Y(t) = - \frac{K \omega_o}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} e^{-\gamma \omega_o t} \sinh(\sqrt{\gamma^2 - 1} \omega_o t) \quad [70]$$

ya que, por definición:

$$\sinh a = \frac{e^a - e^{-a}}{2} \quad [71]$$

Como resumen de los tres casos estudiados, en la [Figura 8](#) se muestran las diferentes respuestas estudiadas para sistemas de segundo orden excitadas con un impulso unitario para distintos valores de γ .

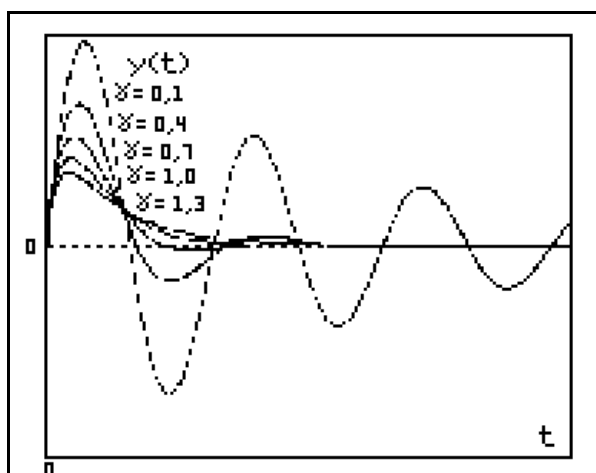


Figura 8 Respuesta de un sistema de segundo orden a un impulso unitario

3.5.3 RESPUESTA A ESCALON

La respuesta de un sistema de segundo orden ante una señal de entrada como la del escalón unidad, $X(s) =$

$1/s$, será la transformada inversa de Laplace de la expresión:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{K \omega_o^2}{s^2 + 2 \gamma \omega_o s + \omega_o^2} \quad [72]$$

De forma semejante a como se hizo para la respuesta a impulso se estudiarán los resultados para los diversos valores posibles del coeficiente de atenuación γ .

3.5.3.1 SISTEMA SUBAMORTIGUADO

En este caso, al ser $\gamma < 1$, la expresión [\[72\]](#) puede ponerse de la forma, haciendo los cálculos pertinentes:

$$Y(s) = K \frac{1}{s} - K \frac{s + 2 \gamma \omega_o}{(s + \gamma \omega_o)^2 + \omega_o^2 (1 - \gamma^2)} \quad [73]$$

cuya transformada inversa puede hallarse en las tablas resultando como respuesta temporal:

$$Y(t) = K \left(1 - \frac{e^{-\gamma \omega_o t}}{\sqrt{1-\gamma^2}} \operatorname{sen} (\omega_o \sqrt{1-\gamma^2} t + \lambda) \right) \quad [74]$$

siendo:

$$\lambda = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma} \right) = \arccos \gamma \quad [75]$$

Si en la ecuación [74] se hace $\gamma = 0$, se obtiene la respuesta para el sistema sin amortiguamiento. La ecuación que resulta es:

$$Y(t) = K [1 - \cos (\omega_o t)] \quad [76]$$

Las expresiones [74] y [75] muestran que la respuesta del sistema se compone de dos partes: un escalón de amplitud igual a la ganancia del sistema y una onda superpuesta. En el caso del sistema subamortiguado, dicha onda es de tipo senoidal amortiguada, con frecuencia ω_d (función del valor del coeficiente de amortiguamiento, γ), y con factor de decrecimiento $\gamma \omega_o$.

En el sistema sin amortiguar se trata de una onda cosenoidal pura, por lo que la respuesta del mismo es oscilante entre los valores 0 y $2K$, con una frecuencia de oscilación libre igual a ω_o .

3.5.3.2 SISTEMA CRITICAMENTE AMORTIGUADO

En este caso, al ser $\gamma = 1$ y existir una raíz real doble se tiene:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{K \omega_o^2}{(s + \omega_o)^2} \quad [77]$$

resultando como respuesta:

$$Y(t) = K (1 - e^{-\omega_o t} (1 + \omega_o t)) \quad [78]$$

que es una respuesta uniformemente creciente de forma exponencial.

3.5.3.3 SISTEMA SOBREAMORTIGUADO

Al ser $\gamma > 1$, existen dos raíces reales diferentes, y puede ponerse:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{K \omega_o^2}{(s + \gamma \omega_o - \omega_o \sqrt{\gamma^2 - 1})(s + \gamma \omega_o + \omega_o \sqrt{\gamma^2 - 1})} \quad [79]$$

Operando según la forma convencional para hallar la transformada inversa de Laplace por descomposición en fracciones simples, resulta:

$$Y(t) = K \left(1 + \frac{\omega_o}{2\sqrt{\gamma^2 - 1}} \left(\frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s^2} \right) \right) \quad [80]$$

siendo s_1 y s_2 los valores de las raíces de la ecuación característica dadas por las ecuaciones [47] y [48], ambas negativas.

La curva de respuesta [74] es aperiódica sin oscilación, con una velocidad de crecimiento que disminuye a medida que aumenta el coeficiente de amortiguamiento, γ .

Los tres casos estudiados se resumen en la [Figura 9](#), en función de los valores de γ .

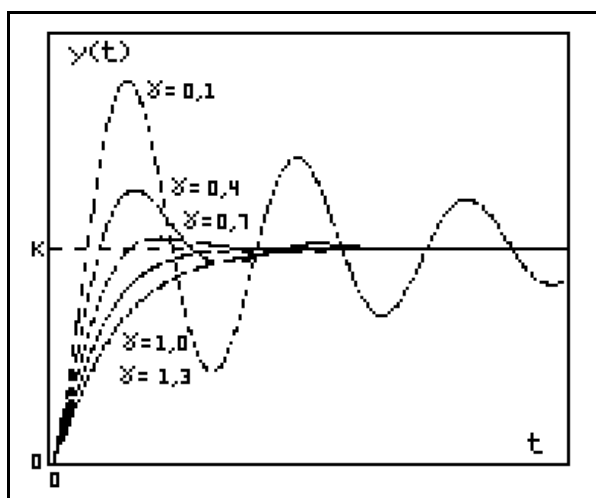


Figura 9 Respuesta de un sistema de segundo orden a un escalón unitario

3.5.4 CONSIDERACIONES SO-

BRE LOS SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Considerando todo lo expuesto y teniendo presente las curvas de la [Figura 8](#) y de la [Figura 9](#), puede resumirse el comportamiento de un sistema de segundo orden de la forma siguiente:

Existe un valor del coeficiente de amortiguamiento, $\gamma = 1$, que separa dos tipos de respuestas; las que sobrepasan el valor final o de régimen permanente y las que no lo sobrepasan (de ahí el nombre de "**amortiguamiento crítico**". Las primeras corresponden a valores de $\gamma < 1$, y presentan una forma oscilatoria pura para $\gamma = 0$ y atenuada para $0 < \gamma < 1$, siendo la frecuencia de las oscilaciones tanto menor cuanto mayor sea el coeficiente γ . Las segundas corresponden a valores de $\gamma > 1$ y presentan una forma exponencial creciente tendiendo al valor de régimen permanente de forma asintótica, sin sobrepasarlo. Cuando el valor del coeficiente γ es notablemente superior a la unidad, el sistema puede ser aproximado por el de primer orden correspondiente a la raíz de menor valor absoluto, que será la dominante (ya que la respuesta es la suma de dos exponenciales).

Los sistemas sobreamortiguados no tienen gran interés en las técnicas de control de procesos, pues resultan demasiado lentos para ser verdaderamente útiles como sistemas de control. Los más interesantes son los sistemas subamortiguados, con la condición de que se actúe de forma que exista una relación aceptable entre la rapidez de respuesta y la amplitud máxima y frecuencia de la correspondiente sobreoscilación.

Tal como se indicó en el Capítulo 1, los parámetros que caracterizan básicamente la respuesta transitoria de un sistema, en este caso de segundo orden subamortiguado, por ser los más importantes en la teoría de control, son los

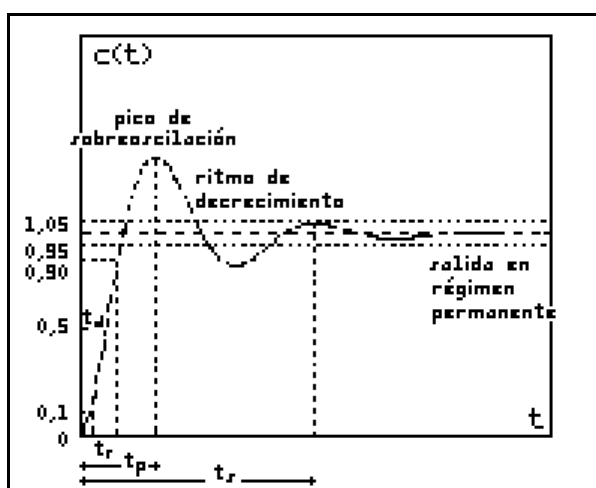


Figura 10 Parámetros característicos de una respuesta transitoria

siguientes ([Figura 10](#)):

* Tiempo de subida, t_r : aunque se definió como el tiempo necesario para que la salida pase del 10 % al 90 % de su valor final, para sistemas de segundo orden subamortiguados suele medirse entre 0 y 100 %. Se obtiene haciendo:

$$\frac{Y(t_r)}{K} = 1 \quad [81]$$

y su valor es tanto más alto cuanto mayor sea γ .

* Tiempo del pico de sobreoscilación, t_p : es el tiempo al cual aparece el primer pico de sobreoscilación; se calcula hallando los máximos de la ecuación de respuesta y tomando el primero de ellos, es decir:

$$\frac{d(Y(t_p))}{dt} = 0 \quad [82]$$

El valor del pico de sobreoscilación se obtiene sustituyendo el valor de t_p en la ecuación de la respuesta.

* Sobreoscilación, M_p : se denomina sobreoscilación a la magnitud en que el valor de pico sobrepasa al valor final estabilizado de la respuesta; suele darse en % del valor final:

$$M_p = 100 \left(\frac{Y(t_p)}{K} - 1 \right) \quad [83]$$

El valor de la sobreoscilación depende exclusivamente del coeficiente de amortiguamiento γ y es tanto mayor cuanto menor sea el valor de γ .

* Tiempo de establecimiento, t_s : es el tiempo que tarda la respuesta en entrar y permanecer en la zona de 5 % en torno a su valor de equilibrio, con lo que podrá calcularse de la siguiente forma:

$$\frac{Y(t_s)}{K} - 1 = 0,05 \quad [84]$$

* Tiempo de retardo, t_d : este parámetro se define como el tiempo que tarda el sistema en dar una respuesta equivalente al 50 % del valor final, es decir:

$$\frac{Y(t_d)}{K} = 0,5 \quad [85]$$

Finalmente, y como resumen de todo lo expuesto, con el fin de dar una visión general de la interacción entre los diversos parámetros, se incluyen algunas consideraciones de interés.

Como se ha visto anteriormente, el porcentaje de sobreoscilación es exclusivamente función del coeficiente de amortiguamiento. Sin embargo, el tiempo de pico de sobreoscilación, t_p , y el tiempo de establecimiento, t_s , son función de γ y ω_o . Aumentando γ se reduciría la sobreoscilación, el tiempo de establecimiento y el número de oscilaciones, todos ellos fenómenos deseables. Pero aumentando γ aumenta también t_p , así como los tiempos de subida, t_s , y de retardo, t_d , lo que hace que el sistema responda más lentamente a la señal de excitación. Aumentando ω_o disminuyen los tiempos anteriores, aumentando por consiguiente la velocidad de respuesta del sistema.

Si se desea una respuesta transitoria aceptable, deberá elegirse un valor de γ relativamente alto para reducir la sobreoscilación, el número de oscilaciones y el tiempo de establecimiento. Si se desea aumentar la velocidad de respuesta del sistema, reduciendo los tiempos de retardo, subida y establecimiento, deberá tomarse un ω_o elevado.

CAPITULO 4

ANALISIS FRECUENCIAL DE SISTEMAS DE LAZO ABIERTO

4.1 OBJETIVOS	<u>1</u>
4.2 RESPUESTA FRECUENCIAL DE UN SISTEMA	<u>2</u>
4.3 REPRESENTACION GRAFICA DE LA RESPUESTA FRECUENCIAL	<u>4</u>
4.4 RESPUESTA FRECUENCIAL DE SISTEMAS SENCILLOS SOBRE EL DIAGRAMA DE NYQUIST	<u>7</u>
4.4.1 SISTEMAS DE PRIMER ORDEN DE RETRASO	<u>7</u>
4.4.2 SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN DE RETRASO	<u>8</u>
4.4.3 TIEMPO MUERTO	<u>10</u>
4.5 RESPUESTA FRECUENCIAL DE SISTEMAS SENCILLOS SOBRE EL DIAGRAMA DE BODE	<u>11</u>
4.5.1 SISTEMAS DE PRIMER ORDEN DE RETRASO	<u>11</u>
4.5.2 SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN DE RETRASO	<u>12</u>
4.5.3 TIEMPO MUERTO	<u>13</u>
4.5.4 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA GENERALES EN SERIE	<u>14</u>

4.1 OBJETIVOS

En el Capítulo 3 se ha analizado el comportamiento dinámico de los sistemas lineales, estudiando su función de transferencia en el dominio de Laplace y obteniendo la respuesta del sistema a funciones de excitación en el dominio del tiempo.

Un método alternativo, que puede ofrecer grandes ventajas en determinadas aplicaciones, es el que utiliza la respuesta frecuencial del sistema como base para el análisis del mismo.

Se conoce por "**respuesta frecuencial**" de un sistema, a la respuesta del mismo, en régimen permanente, cuando se utiliza como señal de entrada una senoidal de amplitud constante y frecuencia variable desde cero a infinito. Como se verá posteriormente, la respuesta de un sistema lineal a una señal de excitación única de tipo senoidal, es otra senoidal de la misma frecuencia que la primera, pero que difiere de ella en los valores de su amplitud y de su ángulo de fase, que son función de la frecuencia. La respuesta de frecuencia de un sistema lineal es, pues, una función que describe analítica

o gráficamente la relación entre las amplitudes de las señales de salida y entrada, así como la diferencia de fase existente entre las mismas, en función de la frecuencia.

El método de análisis frecuencial presenta varias ventajas. Una de las más interesantes es la facilidad con que puede ser obtenida la respuesta de frecuencia en forma experimental. Las curvas obtenidas con los datos experimentales pueden ser utilizadas tanto para realizar el análisis del sistema como para obtener la función de transferencia aproximada del mismo, con lo que éste quedará identificado.

Otra ventaja, también importante, es que la función de transferencia frecuencial puede obtenerse sin más que reemplazar en la función de transferencia del sistema en el dominio de Laplace, $G(s)$, la variable s por $j\omega$, con lo que resulta otra función, $G(j\omega)$, de tipo complejo, que puede ser representada por su módulo o amplitud y su ángulo de fase, para cada valor de ω . Se obtienen de esta forma dos curvas, amplitud-frecuencia y ángulo de fase-frecuencia, que son de gran utilidad para el análisis y diseño de los sistemas de

control.

El principal inconveniente del análisis frecuencial es que, aunque existe una relación entre éste y el análisis temporal, la transformada de Fourier, dicha relación resulta complicada y su aplicación laboriosa, por lo que normalmente, a efectos de diseño, se trabajará en el dominio de la frecuencia, ajustando las curvas de respuesta de forma que éstas cumplan especificaciones fijadas para obtener una respuesta transitoria aceptable en el dominio temporal.

4.2 RESPUESTA FRECUENCIAL DE UN SISTEMA

Se denomina "**respuesta frecuencial**", a la respuesta de un sistema a una entrada de tipo sinusoidal dada por:

$$X(t) = R \operatorname{sen} (\omega t) \quad [1]$$

siendo R la amplitud y ω la frecuencia de la misma. Como es sabido, $\omega = 2\pi/T$ (radianes/s), donde T es el período o tiempo que transcurre para que se produzca una oscilación completa.

La transformada de Laplace de esta función será:

$$X(s) = \frac{R \omega}{s^2 + \omega^2} \quad [2]$$

con lo cual, la respuesta temporal del sistema se obtendría multiplicando este valor por la función de transferencia y efectuando la transformada inversa del producto. Este respuesta sería del tipo:

$$Y(t) = B(\omega) \operatorname{sen} [\omega t + \psi(\omega)] \quad [3]$$

La ecuación [3] muestra que, si se excita un sistema lineal con una señal

senoidal, se obtiene como respuesta, en régimen permanente, otra señal senoidal de la misma frecuencia, desfasada un ángulo $\varphi(\omega)$, función de la frecuencia, respecto de la primera y con una amplitud $B(\omega)$, también función de la frecuencia, que puede diferir de la original, tal y como se indica en la [Figura 1](#).

Ahora bien, se puede demostrar que se llega al mismo resultado por otro procedimiento más sencillo: basta sustituir en la función de transferencia del sistema la variable s por $j\omega$ ($j = \sqrt{-1}$). Se obtiene así un número complejo $G(j\omega)$ que representa la respuesta frecuencial del sistema. El módulo de este número complejo será la relación de los módulos (amplitudes) de las señales de salida y entrada y su argumento será la diferencia entre sus ángulos de fase (o desfase):

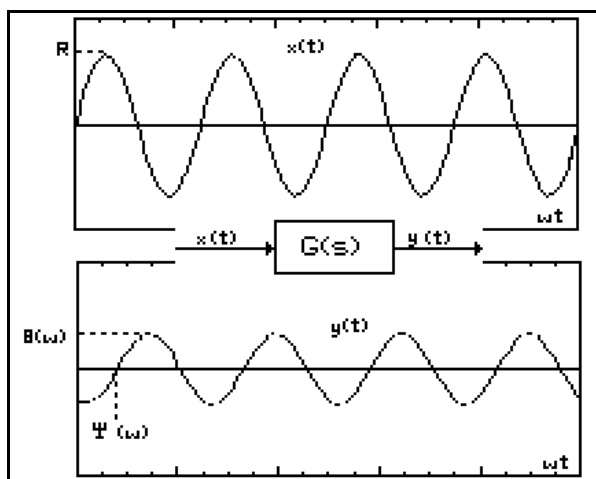


Figura 1 Respuesta frecuencial de un sistema

$$|G(j\omega)| = \frac{B(\omega)}{R} = A(\omega) \quad [4]$$

$$\arg [G(j\omega)] = \psi(\omega) \quad [5]$$

Recuérdese que un número complejo se puede representar de la forma:

$$G(j\omega) = \text{Re} [G(j\omega)] + j \text{Im} [G(j\omega)] \quad [6]$$

o, en coordenadas polares:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg [G(j\omega)]} \quad [7]$$

donde:

$$|G(j\omega)| = [(\operatorname{Re} G)^2 + (\operatorname{Im} G)^2] \quad [8]$$

$$\arg [G(j\omega)] = \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} G}{\operatorname{Re} G} \right) \quad [9]$$

La magnitud $A(\omega)$, que corresponde a la variación del módulo de $G(j\omega)$ con la frecuencia, suele representarse en forma de curva y se la denomina "**curva de variación del módulo**" o "**curva de amplitud de la respuesta frecuencial**". La variación $\psi(\omega)$ con la frecuencia se denomina, por la misma razón, "**curva de variación del ángulo de fase**" o abreviadamente "**curva de ángulo de fase**". Ambas curvas son las que normalmente se utilizan en el análisis frecuencial y definen totalmente el comportamiento del sistema.

4.3 REPRESENTACION GRAFICA DE LA RESPUESTA FRECUENCIAL

Tal como sucedía en el caso del dominio de Laplace, conocida la respuesta frecuencial de un sistema, se puede obtener su respuesta temporal a una señal cualquiera de entrada. Sin embargo, la herramienta matemática necesaria, la transformada de Fourier, es de difícil utilización, ya que precisa el empleo de métodos de integración gráficos o numéricos. Por tal motivo, cuando se realiza el diseño de un sistema en el dominio de la frecuencia se prefiere, tal como ya se ha indicado, trasladar las especificaciones dadas en el dominio temporal a sus equivalentes en el de la frecuencia, realizando integralmente el diseño en este último.

La función de transferencia de un sistema, $G(s)$ tiene, como ya se ha visto, su equivalente $G(j\omega)$ en el dominio de la frecuencia, y esta última puede ser expresada

matemáticamente por las expresiones [4] a [9]. La representación gráfica de $G(j\omega)$ utiliza estas relaciones, por lo que existen, en principio, tres métodos diferentes para llevarla a término: en forma polar (diagrama de Nyquist), en forma de curvas amplitud/frecuencia y ángulo de fase/frecuencia (diagrama de Bode) o en forma de curva amplitud/ángulo de fase, tomando la frecuencia como parámetro (diagrama de Nichols o de Black).

El diagrama de Nyquist, diagrama polar o diagrama del plano G se construye representando el número $G(j\omega)$ en las dimensiones del plano, cuya ordenada es la parte imaginaria de $G(j\omega)$ y cuya abscisa es su parte real. Cada punto de este plano está definido por un valor específico de la frecuencia, ω_1 . Como se muestra en la **Figura 2.a**, se pueden utilizar tanto coordenadas rectangulares (parte real frente a parte imaginaria)

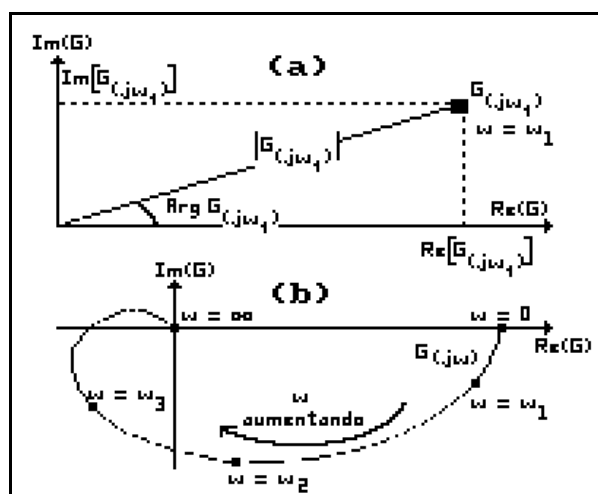


Figura 2 Diagrama Nyquist

a) Punto simple ; b) Curva completa

como coordenadas polares (amplitud frente a ángulo de fase) para ubicar el punto.

Como la frecuencia varía de forma continua de cero a infinito, el trazado no es más que el lugar geométrico de estos puntos, siendo la frecuencia el parámetro de la curva (**Figura 2.b**). La forma y localización de esta curva son características de cada sistema.

El diagrama de Nyquist es de utilización relativamente limitada, empleándose fundamentalmente para el estudio de la estabilidad de los sistemas a partir de la respuesta de frecuencia de los mismos.

El diagrama de Bode, frente al de Nyquist, que muestra toda la información sobre la frecuencia en una sola curva compacta, requiere la representación de dos curvas en vez de una, lo que facilita mucho el manejo de funciones de transferencia complejas. En este diagrama generalmente se representa el ángulo de fase, $\psi(\omega)$,

frente a la frecuencia, ω , utilizando coordenadas semilogarítmicas en esta última. Asimismo se representa la amplitud frente a la frecuencia, en coordenadas doble logarítmicas.

Generalmente se suele utilizar sólo una escala semilogarítmica, ya que para la escala de amplitudes se utiliza como unidad de medida el decibelio, definiéndose la amplitud en decibelios como:

$$L [db] = 20 \log A(\omega) \quad [10]$$

quedando las representaciones del tipo de las mostradas en la [Figura 3](#).

El diagrama de Nichols o diagrama de Black es otra forma de representar la respuesta de frecuencia o función de transferencia senoidal de un sistema, dibujando la curva correspondiente al módulo o amplitud, en decibelios, en función del ángulo de fase, tomando la frecuencia ω como parámetro ([Figura 4](#)).

Como se puede observar, la información

contenida en este diagrama es la misma que la del diagrama de Bode, por lo que suele realizarse el trazado del diagrama de Nichols dibujando primero el de Bode y tomando de éste los datos necesarios.

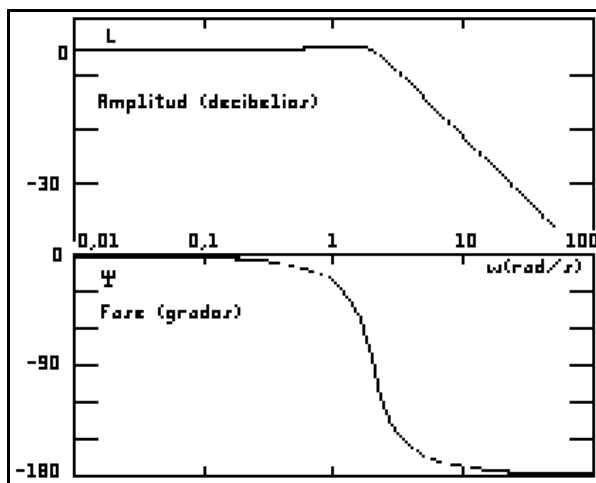


Figura 3 Diagrama de Bode

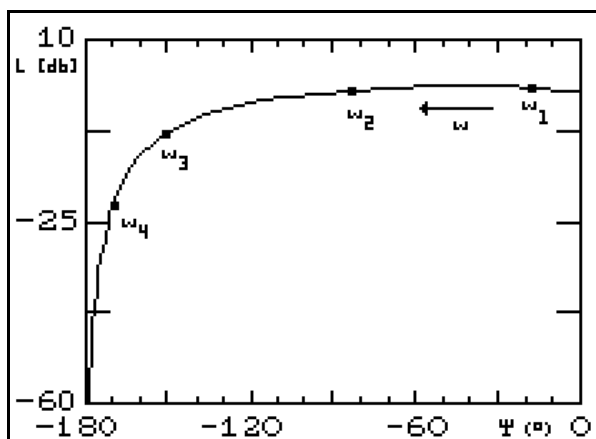


Figura 4 Diagrama de Nichols

4.4 RESPUESTA FRECUENCIAL DE SISTEMAS SENCILLOS SOBRE EL DIAGRAMA DE NYQUIST

4.4.1 SISTEMAS DE PRIMER ORDEN DE RETRASO

La función de transferencia de este sistema en el dominio de Laplace es, como se sabe:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad [11]$$

con lo que, en el dominio de la frecuencia se convertirá en:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j \omega \tau} \quad [12]$$

Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador queda:

$$G(j\omega) = \frac{K (1 - j \omega \tau)}{1 + \omega^2 \tau^2} = \frac{K}{1 + \omega^2 \tau^2} + j \frac{-K \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad [13]$$

habiéndose separado las partes real e imaginaria en dos términos. Se tendrá así:

$$A(\omega) = [(\text{Re})^2 + (\text{Im})^2] = \frac{K}{(1 + \omega^2 \tau^2)} \quad [14]$$

$$\psi(\omega) = \arctan \left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right) = \arctan (-\omega \tau) \quad [15]$$

Cuando la frecuencia es cero, $A = K$ y $\psi = 0$. Cuando la frecuencia se hace infinito, $A \rightarrow 0$ y $\psi \rightarrow -\pi/2$.

Asimismo, cuando $\omega = 1/\tau$, se tiene:

$$A = \frac{K}{\sqrt{2}} \quad [16]$$

$$\psi = \arctan (-1) = -\frac{\pi}{4} \quad [17]$$

Todo ello significa que el diagrama de Nyquist es un semicírculo, tal como muestra la [Figura 5.a](#). La [Figura 5.b](#) muestra el efecto de la variación del valor de la ganancia, K: la magnitud de cada punto cambia, pero el ángulo de fase no se ve afectado.

4.4.2 SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN DE RETRASO

La función de transferencia de este tipo de sistemas es:

$$G(s) = \frac{K \omega_o^2}{s^2 + 2 \gamma \omega_o s + \omega_o^2} \quad [18]$$

siendo esta función en el dominio de la frecuencia:

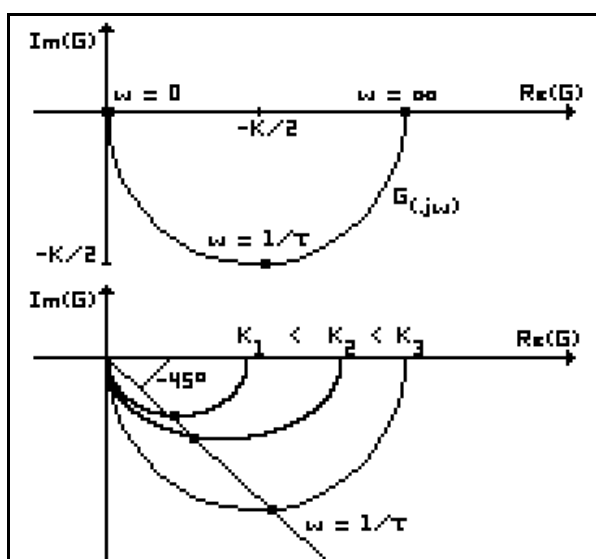


Figura 5 Diagrama de Nyquist de un sistema de primer orden

$$G(j\omega) = \frac{K \omega_o^2}{\omega_o^2 - \omega^2 + j (2 \gamma \omega_o \omega)} \quad [19]$$

y racionalizando el denominador:

$$G(j\omega) = \frac{K \omega_o^2 (\omega_o^2 - \omega^2) - j (2 K \gamma \omega_o^3 \omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4 \gamma^2 \omega_o^2 \omega^2} \quad [20]$$

de donde se puede calcular el módulo y el argumento del complejo:

$$A(\omega) = \frac{K \omega_o^2}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4 \gamma^2 \omega_o^2 \omega^2}} \quad [21]$$

$$\psi(\omega) = \arctan \left(\frac{-2 \gamma \omega_o \omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \right) \quad [22]$$

Cuando la frecuencia es cero, $A = K$ y $\psi = 0$; cuando tiende a infinito, $A \rightarrow 0$ y $\psi \rightarrow -\pi$. Asimismo, cuando $\omega = \omega_o$ sucede que:

$$A = \frac{K}{2 \gamma} \quad [23]$$

$$\psi = - \frac{\pi}{2} \quad [24]$$

Así pues, el diagrama comienza en el punto $(K,0)$ para $\omega = 0$ y termina siendo tangente en el origen al eje real negativo para $\omega = \infty$. Asimismo la frecuencia correspondiente en que el diagrama corta al eje imaginario es la frecuencia natural no amortiguada del sistema (ω_0). Todo ello se muestra en la [Figura 6](#).

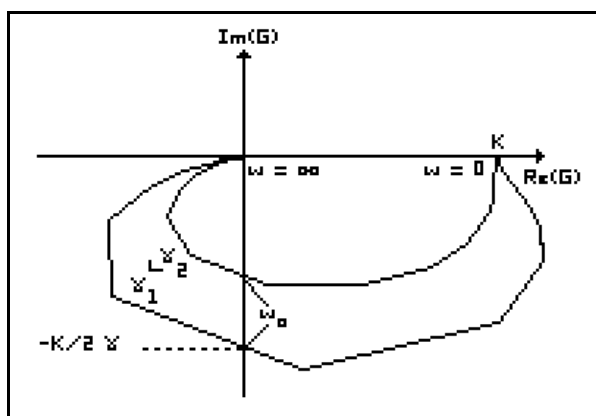


Figura 6 Diagrama de Nyquist de un sistema de segundo orden

Obsérvese finalmente que todo el estudio para el sistema de segundo orden es válido para $0 < \gamma < 1$, es decir, un sistema subamortiguado, que son los de mayor interés para el diseño de sistemas de control.

4.4.3 TIEMPO MUERTO

La función de transferencia del tiempo muerto es:

$$G(s) = e^{-\tau s} \quad [25]$$

o bien, en el dominio de la frecuencia:

$$G(j\omega) = e^{-j\tau\omega} \quad [26]$$

es decir, un número complejo de módulo unidad y argumento $-\tau\omega$. Ello significa que este sistema cambia el ángulo de fase, ψ , pero no tiene efecto sobre la amplitud, que vale la unidad a cualquier frecuencia.

Cuando la frecuencia es nula, $\psi = 0$; cuando tiende a infinito, entonces $\psi \rightarrow -\infty$. El diagrama de Nyquist será, pues, una circunferencia de radio unidad y centro el origen de coordenadas, tal como se muestra en la [Figura 7](#).

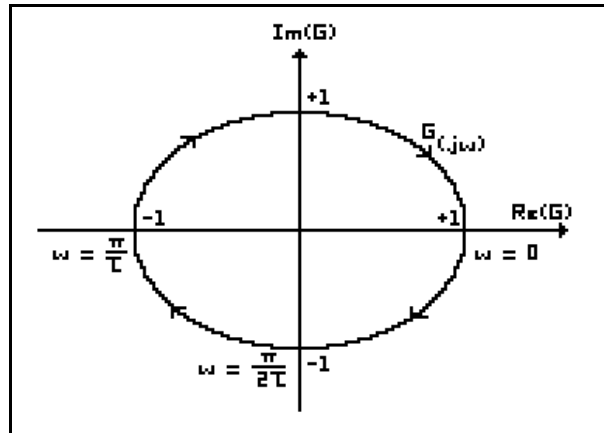


Figura 7 Diagrama de Nyquist del tiempo muerto

4.5 RESPUESTA FRECUENCIAL DE SISTEMAS SENCILLOS SOBRE EL DIAGRAMA DE BODE

4.5.1 SISTEMAS DE PRIMER ORDEN DE RETRASO

A partir de la ecuación [\[14\]](#) se puede obtener la amplitud en decibelios, aplicando la ecuación [\[10\]](#). No obstante, la mayoría de las veces se representa su valor normalizado, es decir, dividido por la ganancia en estado estacionario, K. Así:

$$L = 20 \log \frac{1}{(1 + \omega^2 \tau^2)}$$

[27]

mientras que el ángulo de fase se representa según la ecuación [\[15\]](#).

Los diagramas de Bode del sistema de primer orden quedarán, pues, de la forma indicada en la [Figura 8](#).

Una de las mayores ventajas de los diagramas de Bode es que las curvas de amplitud se pueden trazar fácilmente considerando las asíntotas de alta y baja frecuencia. Cuando la frecuencia tiende a cero, la curva normalizada de L también tiende a cero. Cuando la frecuencia

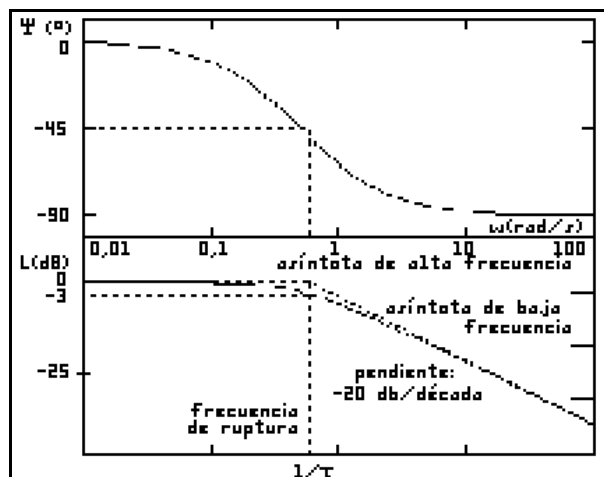


Figura 8 Diagramas de Bode para sistemas de primer orden

tiende a infinito entonces:

$$L_{\omega \rightarrow \infty} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\omega^2 \tau^2}} = -20 \log (\omega \tau) \quad [28]$$

o lo que es lo mismo:

$$L_{\omega \rightarrow \infty} = -20 \log \omega - 20 \log \tau \quad [29]$$

La expresión [29] es la ecuación de una recta $L - \log \omega$, de pendiente -20. L decrecerá 20 db cuando $\log \omega$ crece una unidad, o cuando ω crece en un factor de 10. A este factor de 10 se le denomina "**década**". Es decir dos frecuencias ω_1 y ω_2 están separadas n décadas cuando $\omega_1/\omega_2 = 10^n$. Asimismo, cuando $\omega_1/\omega_2 = 2$, las frecuencias están separadas una "**octava**". Así, la pendiente de la asíntota de alta frecuencia es -20 db/década ó 6 db/octava. La asíntota de alta frecuencia corta a la de baja frecuencia ($L = 0$) a $\omega = 1/\tau$. A este valor se le denomina "**frecuencia de ruptura**". La frecuencia de ruptura divide, pues, la respuesta de frecuencia en dos partes: una horizontal para las bajas frecuencias y otra inclinada para las frecuencias elevadas. Su valor es de gran importancia para realizar el trazado de los diagramas de Bode. Obsérvese además que el ángulo de fase es igual a $-\pi/4$ en la frecuencia de ruptura.

4.5.2 SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN DE RETRASO

En este caso, la ecuación [21] se transforma en:

$$L = 20 \log \frac{\omega_o^2}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4 \gamma^2 \omega^2 \omega_o^2}} \quad [30]$$

mientras que la [22] no sufre modificación.

El diagrama de Bode de este sistema se muestra en la [Figura 9](#) para diferentes valores del coeficiente de amortiguamiento, γ .

La asíntota de baja frecuencia ($\omega = 0$) será $L = 0$, mientras que la de alta frecuencia ($\omega \rightarrow \infty$) será:

$$L_{\omega \rightarrow \infty} = 20 \log \frac{\omega_o^2}{\omega^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_o} \quad [31]$$

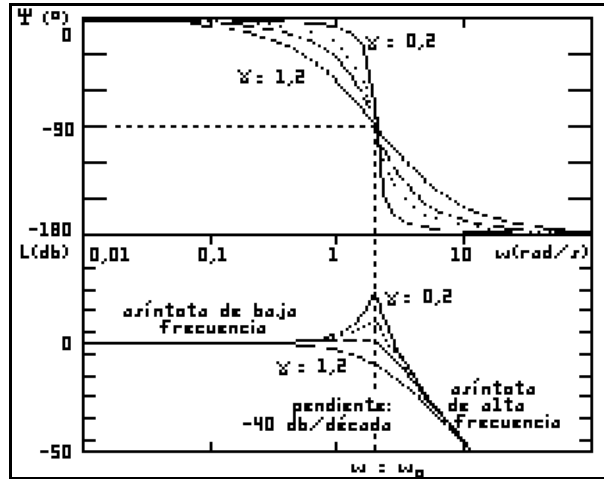


Figura 9 Diagrama de Bode de un sistema de segundo orden

que representa una recta, con pendiente -40 db/década que corta a la otra asíntota ($L = 0$) en $\omega = \omega_o$, que corresponde al punto de ruptura.

Como se puede ver, ambas asíntotas son independientes del coeficiente de amortiguamiento, γ , con lo cual, para un valor relativamente pequeño de éste, la aproximación asintótica de las curvas de respuesta de frecuencia no es muy exacta, puesto que éstas dependen tanto de la frecuencia natural, ω_o , como de γ .

4.5.3 TIEMPO MUERTO

En este caso la amplitud en decibelios será:

$$L = 20 \log 1 = 0 \quad [32]$$

mientras que la expresión para el ángulo de fase es $-\omega$. Como se muestra en la [Figura 10](#), la respuesta frecuencial sobre el diagrama de Bode de la amplitud es una recta horizontal

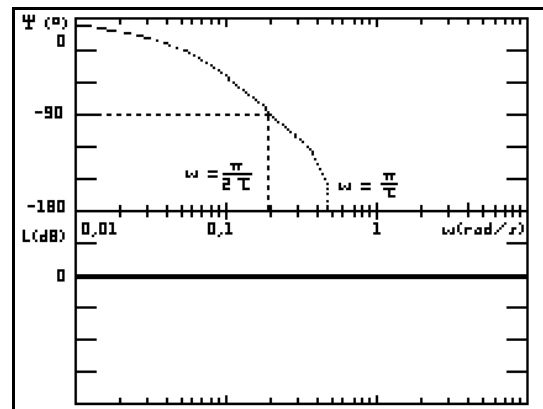


Figura 10 Diagrama de Bode del tiempo muerto

para todas las frecuencias, mientras que el ángulo de fase tiende a $-\infty$.

4.5.4 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA GENERALES EN SERIE

La razón más importante por la que se utilizan ampliamente los diagramas de Bode es que facilitan enormemente la combinación de funciones de transferencia. Una función de transferencia compleja puede ser descompuesta en elementos simples, cada uno de los cuáles se representa en un diagrama de Bode. Finalmente la función de transferencia total se obtiene sumando las curvas de amplitud en decibelios y las de ángulo de fase de cada una de las funciones simples, gracias a las propiedades de los números complejos.

CAPITULO 5

ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LA DINAMICA DE UN SISTEMA

5.1 OBJETIVOS	<u>1</u>
5.2 METODOS DIRECTOS	<u>2</u>
5.2.1 AJUSTE TEMPORAL DE LA RESPUESTA A ESCALON	<u>2</u>
5.2.2 PRUEBA DE LA ONDA SENOIDAL	<u>3</u>
5.3 METODOS INDIRECTOS	<u>4</u>
5.3.1 PRUEBA DE IMPULSO	<u>4</u>
5.3.2 PRUEBA DE ESCALON	<u>5</u>
5.4 OTROS METODOS	<u>6</u>

5.1 OBJETIVOS

Las relaciones dinámicas discutidas hasta ahora han sido determinandas a partir de modelos matemáticos del proceso, es decir, para describir el comportamiento dependiente del tiempo del sistema, se han utilizado ecuaciones matemáticas, basadas en leyes fundamentales físicas y químicas. Se ha supuesto que todos los valores de los parámetros, tales como tiempos de residencia, velocidades de reacción, coeficientes de transmisión de calor, etc. eran conocidos, con lo que el comportamiento dinámico ha podido ser predicho sobre una base esencialmente teórica.

Para un proceso que ya se encuentra en operación, existe una aproximación alternativa que es esencialmente empírica; el comportamiento dinámico puede ser deducido a partir de datos experimentales. Esta aproximación experimental se usa frecuentemente cuando se piensa que el proceso es demasiado complicado como para ser modelado a partir de principios básicos. Asimismo se utiliza para encontrar los valores de algunos parámetros que son desconocidos. Muchos de estos parámetros pueden ser calculados a partir de datos estacionarios, pero algunos han de ser obtenidos a partir de pruebas dinámicas.

Una tercera utilización, muy importante, de los experimentos dinámicos es la confirmación de un modelo matemático teórico. Como ya se ha indicado, la verificación del modelo es un paso muy deseable en su desarrollo y aplicación.

La identificación experimental de la dinámica de un proceso ha sido un área de investigación muy importante en los últimos años, habiéndose propuesto para ello diversas técnicas. Aquí sólo se estudiarán los métodos convencionales y probados, que se utilizan actualmente de forma muy amplia en la industria química. Estos métodos pueden ser directos o indirectos, según se utilicen los datos de respuesta del sistema o sea necesaria su transformación. A continuación se discutirán algunas de estas técnicas.

5.2 METODOS DIRECTOS

5.2.1 AJUSTE TEMPORAL DE LA RESPUESTA A ESCALON

La forma más directa de obtener un modelo dinámico empírico de un proceso es encontrar los parámetros (tiempo muerto, constante de tiempo, coeficiente de amortiguamiento, etc.) que ajusten una respuesta a escalón obtenida experimentalmente. Para ello se introduce una señal de entrada en escalón, $Q(t)$ y se registra la variable de salida $x(t)$ como una función del tiempo, según se muestra en la [Figura 1](#).

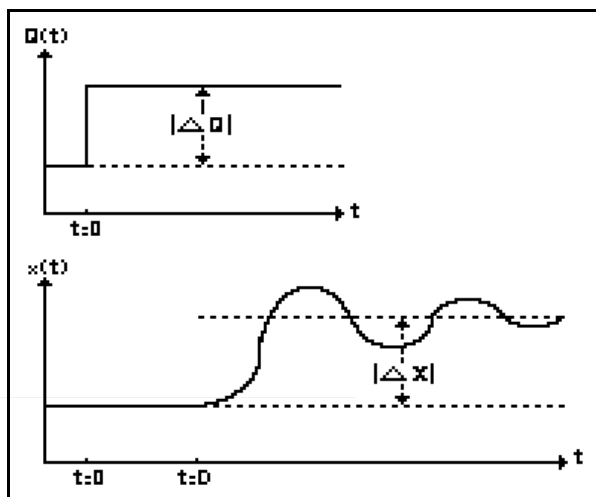


Figura 1 Ajuste de la respuesta a escalón

Observando la forma de la curva $x(t)$, se intenta encontrar una función de transferencia aproximada, $G(s)$, que pudiera dar el mismo tipo de respuesta a escalón. La función de transferencia será un cociente de polinomios en s con una ganancia en estado estacionario, K , y quizás un tiempo muerto D :

$$G(s) = K \frac{Z(s) e^{-Ds}}{P(s)} = K \frac{(\tau_{z1}s + 1)(\tau_{z2}s + 1) \dots (\tau_{zm}s + 1) e^{-Ds}}{(\tau_{p1}s + 1)(\tau_{p2}s + 1) \dots (\tau_{pn}s + 1)} \quad [1]$$

La ganancia en estado estacionario, K , se obtiene fácilmente a partir de la relación entre la salida final en estado estacionario, $|\Delta X|$, respecto a la amplitud del escalón de entrada, $|\Delta Q|$.

El tiempo muerto, D , también se obtiene fácilmente a partir de la curva de salida como el tiempo en que la salida comienza a responder.

El coeficiente de amortiguamiento del sistema, γ , se puede obtener del grado de sobreoscilación o de la velocidad de decaimiento de cualquier oscilación. Si no existe oscilación, los polos de la función de transferencia han de ser todos reales. La

forma y la velocidad de cambio de $x(t)$ se puede utilizar para estimar los polos y los ceros de $G(s)$.

Este método es simple y de fácil utilización. Sin embargo, es difícil distinguir entre sistemas de segundo o tercer orden y sistemas de orden superior. Asimismo es difícil de detectar con precisión constantes de tiempo que difieren mucho.

5.2.2 PRUEBA DE LA ONDA SENOIDAL

El siguiente nivel de prueba dinámica es la prueba directa de la onda senoidal, para lo cual se varía la entrada al proceso en estudio de forma senoidal. Ello se logra de diferentes maneras, aunque generalmente se utilizan generadores de onda senoidal comerciales, mecánicos, electrónicos o neumáticos.

Una vez el proceso está estabilizado, se establecen las curvas senoidales de entrada y salida y se registran. Ensayadas un cierto número de ondas senoidales de distinta frecuencia pueden representarse los resultados obtenidos en diagramas de Nyquist, Bode o Nichols.

Una vez obtenidas las curvas $G(j\omega)$, éstas se pueden usar directamente para examinar la dinámica y la estabilidad del sistema en el dominio de la frecuencia, o bien para ajustar una función de transferencia aproximada a las curvas experimentales $G(j\omega)$.

En un diagrama de Bode se puede obtener la ganancia de estado estacionario a partir de la asíntota de frecuencia cero. Las constantes de tiempo pueden ser obtenidas a partir de los puntos de intersección de las asíntotas. La pendiente de la asíntota a frecuencia infinita dará el orden del sistema. Si se trata de un sistema de segundo orden, se puede obtener el coeficiente de amortiguamiento midiendo el pico de resonan-

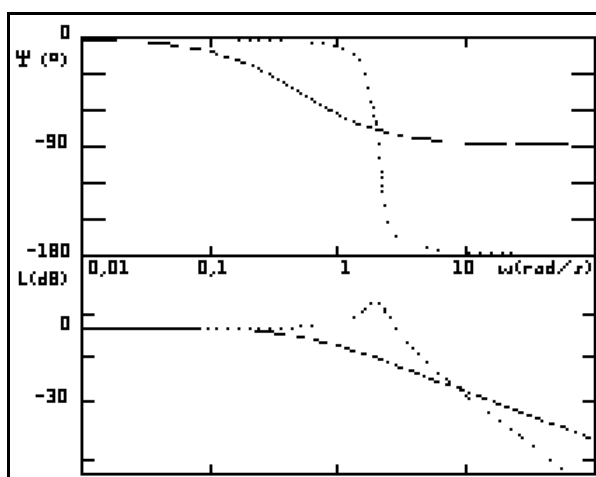


Figura 2 Ajuste de una función de transferencia a los datos experimentales de respuesta frecuencial

cia.

Una vez la curva de amplitud se ha ajustado adecuadamente mediante una función de transferencia aproximada $G_A(j\omega)$, se compara el ángulo de fase de ésta con la curva experimental. Generalmente, la diferencia entre ambas es el tiempo muerto.

Como ejemplos de lo citado se muestran dos casos concretos en la [Figura 2](#).

Esté método es extremadamente útil para obtener datos dinámicos precisos, ya que se pueden determinar con él el orden del sistema, el amortiguamiento y las constantes de tiempo.

La desventaja principal de este procedimiento es que puede consumir mucho tiempo si se aplica a un proceso o un equipo muy grande, ya que algunos procesos poseen constantes de tiempo del orden de los minutos o las horas; asimismo, la oscilación de estado estacionario tiene que ser establecida para cada valor de la frecuencia. Así pues, puede tardarse días para generar las curvas de la respuesta frecuencial completa de un proceso lento.

5.3 METODOS INDIRECTOS

5.3.1 PRUEBA DE IMPULSO

La prueba de impulso mantiene muchas de las ventajas de la prueba directa de la onda senoidal, ya que permite obtener curvas de respuesta de frecuencia razonablemente fiables. Además este método se puede aplicar en un tiempo mucho más corto que el requerido para la respuesta frecuencial.

Según se indica en la [Figura 3](#), se introduce como señal de entrada en el proceso un impulso $Q(t)$ y se registra la respuesta de la salida, $x(t)$. Si $x(t)$ y $Q(t)$ son perturbaciones del estado estacionario, comenzarán y finalizarán en cero.

A las funciones de entrada y salida se les aplica la transformada de Fourier y se dividen mutuamente para obtener la

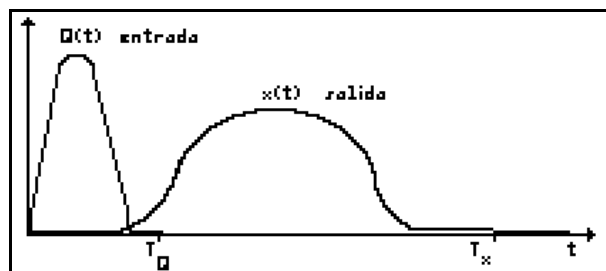


Figura 3 Prueba de impulso: curvas de entrada y salida

función de transferencia del sistema en el dominio de la frecuencia, $G(j\omega)$.

Para ello es necesario evaluar varias integrales para un valor numérico de la frecuencia, ω , arbitrario, lo que se suele llevar a cabo con ayuda de un ordenador, y permite obtener un punto de la curva de respuesta de frecuencia. A continuación se varía el valor de la frecuencia y se repite la integración, usando las mismas funciones experimentales $x(t)$ y $Q(t)$, pero con el nuevo valor de ω . Repitiendo el proceso para las frecuencias deseadas se puede obtener toda la función $G(j\omega)$.

En teoría, basta un solo impulso para generar toda la curva de respuesta de frecuencia. En la práctica generalmente se necesitan varios impulsos para establecer la duración y el tamaño del mismo que sea más adecuado para el sistema en estudio.

5.3.2 PRUEBA DE ESCALON

La prueba de escalón puede realizarse haciendo variar de tiempo en tiempo la variable de entrada desde el nivel de operación a un nuevo nivel. Estos cambios pueden ser instantáneos o graduales según se muestra en la [Figura 4](#). Estos datos de respuesta a un escalón se pueden obtener con facilidad, simplemente midiendo las variables de interés durante varias horas o días de operación de la planta.

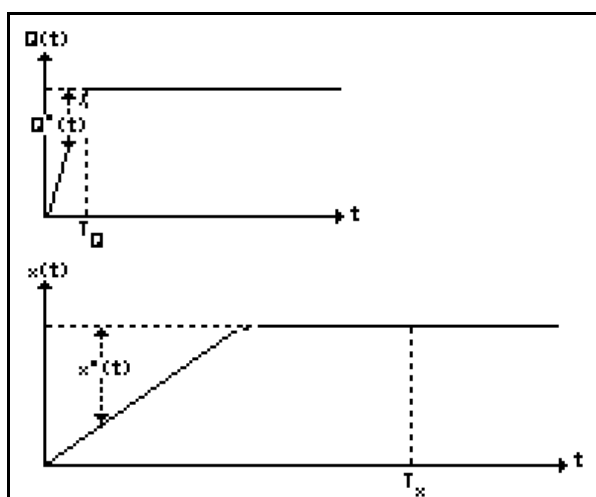


Figura 4 Prueba de escalón: curvas de entrada y salida

Los datos obtenidos se pueden convertir en curvas de respuesta de frecuencia diferenciando ambas funciones en el dominio de la frecuencia. Las integrales de Fourier así obtenidas se evalúan de la misma forma que la indicada para la prueba de impulso, obteniéndose asimismo la curva completa de respuesta de frecuencias utilizando valores de ω arbitrarios.

5.4 OTROS METODOS

Los métodos presentados hasta aquí son los más simples y determinísticos; se han propuesto, sin embargo muchas técnicas más sofisticadas y potentes, que utilizan la estadística para intentar resolver los problemas derivados de señales con ruido.

Los métodos hasta ahora discutidos generalmente se aplican de forma independiente ("**off-line**"), es decir, el proceso se perturba, se registran los datos y se realizan los cálculos para encontrar una función empírica $G(s)$ o $G(j\omega)$. Esta información puede ser utilizada posteriormente para múltiples propósitos: evaluación de parámetros, verificación de un modelo matemático, diseño de controladores, etc.

Sin embargo, en los últimos años ha progresado notablemente la investigación en el campo de la identificación dinámica en línea ("**on-line**"), es decir, generando continuamente un modelo dinámico del proceso. Se detecta así cualquier cambio con el tiempo en el proceso y esta información se utiliza para reajustar los controladores, con objeto de conseguir el rendimiento deseado. Esto es lo que se conoce como "**control adaptativo**".

Con los ordenadores de control de procesos en línea, tal esquema se puede aplicar actualmente a los procesos químicos. El principal impedimento para su uso más generalizado es la falta de incentivos económicos, ya que es rara la planta química que cambie tan rápidamente como para que estén justificados los métodos de control en línea.

CAPITULO 6
SISTEMAS LINEALES DE LAZO CERRADO:
INTRODUCCION AL CONTROL

6.1 OBJETIVOS	<u>2</u>
6.2 EL LAZO DE CONTROL	<u>2</u>
6.3 MODOS DE OPERACION DE UN SISTEMA DE CONTROL	<u>3</u>
6.4 ECUACION GENERAL DE UN SISTEMA DE CONTROL	<u>5</u>
6.5 ACCIONES BASICAS DE CONTROL	<u>6</u>
6.5.1 CONTROL PROPORCIONAL	<u>7</u>
6.5.1.1 RESPUESTA DE UN PROCESO CON CONTROL PROPORCIONAL	<u>8</u>
6.5.1.2 CONTROL TODO-NADA	<u>11</u>
6.5.2 CONTROL INTEGRAL	<u>11</u>
6.5.2.1 RESPUESTA DE UN PROCESO CON CONTROL INTEGRAL	<u>12</u>
6.5.3 CONTROL PROPORCIONAL-INTEGRAL (PI)	<u>15</u>
6.5.3.1 RESPUESTA DE UN PROCESO CON CONTROL PI	<u>16</u>
6.5.4 CONTROL PROPORCIONAL-DIFERENCIAL (PD)	<u>18</u>
6.5.4.1 RESPUESTA DE UN PROCESO CON CONTROL PD	<u>19</u>
6.5.5 CONTROL PROPORCIONAL-INTEGRAL-DIFERENCIAL (PID)	<u>21</u>
6.5.5.1 RESPUESTA DE UN PROCESO CON CONTROL PID	<u>22</u>

DINAMICA DE SISTEMAS, SIMULACION Y CONTROL

Capítulo 6

6.6 COMPARACION DE LAS ACCIONES DE CONTROL	23
6.7 EFECTO DEL TIEMPO MUERTO	25

6.1 OBJETIVOS

En los capítulos anteriores se han estudiado las técnicas para analizar el comportamiento dinámico de un sistema en los dominios del tiempo, de Laplace y de la frecuencia. Se abordó el análisis de sistemas sencillos y en ausencia de controladores. Con esta base, se puede extender la discusión a un sistema completo de control e introducir el concepto fundamental de "**realimentación**", que se lleva a cabo en los sistemas lineales de lazo cerrado.

6.2 EL LAZO DE CONTROL

Como ya se ha visto en el **Capítulo 1**, un lazo de control consta de los siguientes elementos:

- * Proceso
- * Elemento de medida
- * Controlador
- * Elemento final de control

Cada uno de estos componentes puede ser identificado como un elemento físicamente individual en el proceso y son los que se considerarán, en principio, en el estudio de los sistemas de control. Sin embargo, es obvio que existen sistemas de control mucho más complejos en los que se utilizan diversas combinaciones de estos elementos.

A efectos de cálculo es conveniente representar el sistema de control por medio de un diagrama de bloques, siendo el más sencillo el representado por la [Figura 1](#). Este diagrama facilita la visualización de las relaciones existentes entre las diferentes señales y en él aparecen algunos términos que se utilizarán profusamente en el estudio subsiguiente.

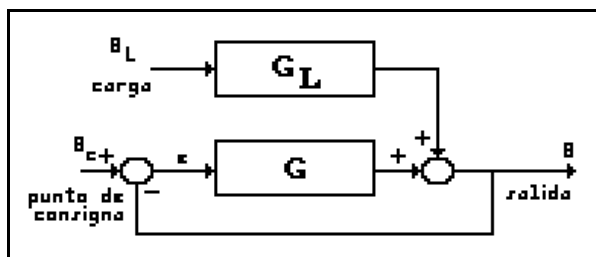


Figura 1 Sistema de control de lazo cerrado

El "**punto de consigna**" ("**set point**") es el valor deseado de la variable

DINAMICA DE SISTEMAS, SIMULACION Y CONTROL

Capítulo 6

controlada; la "**carga**" ("**load**") se refiere a un cambio en cualquier variable que puede causar un cambio en la variable controlada. La función de transferencia del sistema se ha designado por G_L (el sistema soporta un cambio en la carga) mientras que se ha designado por G la función de transferencia del controlador y del actuador (que actúa sobre la variable manipulada) a efectos simplificativos.

Como ya se ha visto anteriormente, el sistema de control mostrado en la [Figura 1](#) es un sistema de lazo cerrado o de realimentación, ya que el valor medido de la variable controlada se realimenta a un "**comparador**", donde su valor se compara con el valor deseado o punto de consigna. Si existe diferencia entre la variable medida y el punto de consigna, se produce un error; este error se alimenta al controlador, que procede a ajustar la variable manipulada con objeto de hacer volver la variable controlada al valor de consigna.

6.3 MODOS DE OPERACION DE UN SISTEMA DE CONTROL

Un sistema de control en lazo cerrado consiste en un proceso y un controlador que ajusta automáticamente una de las entradas al proceso como respuesta a una señal realimentada desde la salida del proceso. El rendimiento del sistema de control puede juzgarse mediante la respuesta transitoria de la salida a cambios específicos en la entrada.

El cambio en la entrada puede ser un cambio en el punto de consigna o un cambio en una o varias de las variables de carga. Si el objetivo del sistema de control es hacer que el proceso siga los cambios del punto de consigna de la forma más próxima posible, la operación se denomina "**servo-operación**". Cuando el objetivo principal sea mantener la salida lo más constante posible frente a cambios de carga la operación se denomina "**operación de regulación**".

Para acometer el diseño de un sistema de control es necesario tener muy en cuenta el objetivo del mismo, ya que el sistema que da una óptima servo-operación generalmente no será el mejor para una regulación. Así, una gran inercia hace que el sistema presente problemas para la servo-operación, pero frecuentemente ayuda a

DINAMICA DE SISTEMAS, SIMULACION Y CONTROL

Capítulo 6

hacer mínimo el error en una operación de regulación.

La servo-operación es típica de sistemas eléctricos y mecánicos, pero en el estudio de control de procesos tiene mucha más importancia la operación de regulación. Un proceso químico continuo típico opera con un punto de consigna constante a lo largo de horas o días y las variaciones en la consigna son generalmente ajustes mínimos. Son mucho más frecuentes y producen errores mayores los cambios de variables de carga como flujos, temperaturas y presiones.

No obstante, algunos procesos discontinuos requieren una variación continua de la temperatura u otra variable, lo que sugiere que el sistema de control sea diseñado para servo-operación. A pesar de todo, si los cambios del punto de consigna son lentos y continuos, los errores producidos por los cambios de carga pueden ser del mismo orden de magnitud que los producidos por los cambios de consigna, y es necesario considerar la respuesta a ambos tipos de operación.

Por otro lado, la respuesta transitoria de un sistema de control se refiere a la respuesta a cualquier tipo de entrada, pero generalmente se tomará referida a una variación en escalón, bien de la consigna o bien de la variable de carga.

La variación en escalón se utiliza parcialmente por conveniencia, ya que las soluciones para este tipo de entrada son más fáciles de obtener que para cualquier otro tipo de perturbación. Además, el cambio en escalón es el tipo más severo de perturbación, y la respuesta al mismo muestra el error máximo que podría producirse debido a una eventual variación de la carga. Si se comparan varios sistemas de control, aquél con la mejor respuesta a un escalón en la carga tendrá generalmente la mejor respuesta a fluctuaciones aleatorias de dicha variable. Respecto a la estabilidad del sistema, no importa qué tipo de perturbación se tome, ya que si el sistema es lineal, un lazo cerrado de control será inestable a cualquier tipo de perturbación si lo es a una cualquiera de ellas.

Si se necesita un control muy estricto, se pueden calcular asimismo las respuestas a un impulso, una rampa o de frecuencia, para poder evaluar el sistema de control. Sin embargo, en la mayoría de los casos, la evaluación de un sistema de control se basa en la respuesta a escalón o, en algunos casos, en ésta y en la

respuesta de frecuencia.

6.4 ECUACION GENERAL DE UN SISTEMA DE CONTROL

La ecuación general que permite obtener la respuesta de un sistema de lazo cerrado, se puede obtener manipulando algebraicamente las señales y las funciones de transferencia del diagrama de bloques correspondiente. Considérese pues, el proceso controlado mostrado en la [Figura 2](#), donde G_L es la función de transferencia del proceso, G es la del controlador y el actuador y G_m es la del elemento de medida.

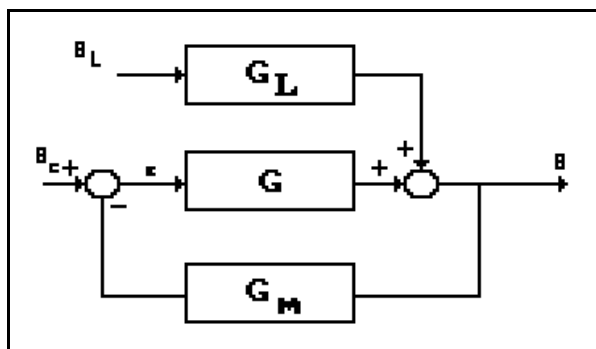


Figura 2 Diagrama de bloques de un sistema de control

Para este sistema se puede poner, haciendo un balance en el segundo punto suma:

$$\theta = e G + \theta_L G_L \quad [1]$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que en el primer punto suma:

$$e = \theta_c - \theta_m \quad [2]$$

la ecuación [\[1\]](#) queda de la forma:

$$\theta = (\theta_c - \theta_m) G + \theta_L G_L \quad [3]$$

como además:

$$\theta_m = \theta G_m \quad [4]$$

queda, en definitiva:

$$\theta = \frac{G}{1 + G G_m} \theta_c + \frac{G_L}{1 + G G_m} \theta_L \quad [5]$$

ecuación que representa la variación de la variable controlada frente a los cambios en el punto de consigna (θ_c) y en la carga (θ_L). Obsérvese que las variables θ_i representan variaciones respecto a los valores nominales, que se toman como nulos en estado estacionario.

La respuesta a los cambios en la consigna se obtiene haciendo $\theta_L = 0$, sustituyendo θ_c por su transformada de Laplace (que es $1/s$ para un escalón unitario) y aplicando la transformada inversa para obtener θ como función del tiempo. Para cambios en la carga, $\theta_c = 0$ y se sigue el mismo procedimiento. En general, pueden existir diferentes variables de carga, pero sólo se considerará una de ellas.

Por otro lado se considerará en lo sucesivo que el actuador o válvula de control es un sistema de primer orden de retraso mientras que el elemento de medida no produce retardo apreciable, con lo cual $G_m = 1$ y la ecuación [5] quedará de la forma simplificada:

$$\theta = \frac{G}{1 + G} \theta_c + \frac{G_L}{1 + G} \theta_L \quad [6]$$

Por su parte, la función de transferencia del controlador dependerá del tipo de control que se utilice, como se verá a continuación.

6.5 ACCIONES BASICAS DE CONTROL

En los sistemas de control automático, el valor real que toma la variable de salida del proceso a regular es comparado con el valor deseado o referencia dando

lugar, en su caso, a una señal de error. Dicha señal es llevada al regulador, cuya salida o señal de control actúa sobre el proceso en el sentido de que el error tienda a reducirse a cero o a un valor muy pequeño. La forma en que el regulador genera la señal de control se denomina "**acción de control**". Determinadas acciones de control se repiten constantemente en los sistemas fijos de regulación automática; tales acciones son conocidas como "**acciones básicas de control**". De acuerdo con su modo de acción existen los siguientes tipos de control:

- Proporcional (P)
- Integral (I)
- Proporcional-integral (PI)
- Proporcional-diferencial (PD)
- Proporcional-integral-diferencial (PID)

Se omiten los casos diferencial (D) y diferencial-integral (DI), cuya existencia es meramente teórica.

6.5.1 CONTROL PROPORCIONAL

Ejecutando una acción proporcional, el controlador suministra una señal de salida que es proporcional a la señal de entrada, en este caso, el error, es decir:

$$Y(t) = K_c e(t) \quad [7]$$

siendo la constante K_c la denominada "**ganancia**" del controlador. No obstante, en los controladores comerciales se utiliza la llamada "**banda proporcional**", BP, magnitud inversa a la ganancia ex-

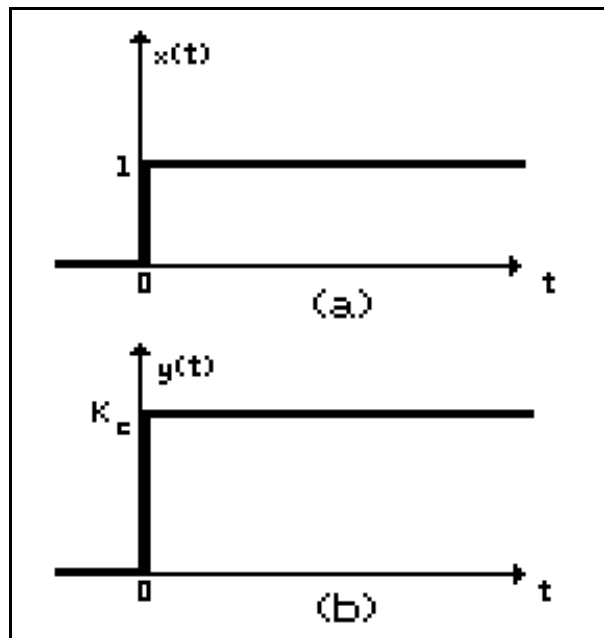


Figura 3 Respuesta a un escalón del control proporcional

presada en porcentaje, es decir:

$$BP (\%) = 100 \frac{1}{K_c} \quad [8]$$

y que representa el porcentaje de variación de la variable controlada necesario para provocar una carrera completa del elemento final de control.

La transformada de Laplace del control proporcional será:

$$Y(s) = K_c (s) \quad [9]$$

con lo cual la función de transferencia será de la forma:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = K_c \quad [10]$$

En la [Figura 3](#) se ha representado la respuesta del controlador de tipo proporcional a un escalón unitario. Como se puede ver, es otro escalón de amplitud K_c .

6.5.1.1 RESPUESTA DE UN PROCESO CON CONTROL PROPORCIONAL

Considérese un proceso de primer orden sin retardo en la medida, regulado por un controlador proporcional, siendo asimismo de primer orden el elemento actuador, tal como se muestra en la [Figura 4](#). Para simplificar el cálculo, se supondrán iguales las constantes de tiempo del proceso y del actuador.

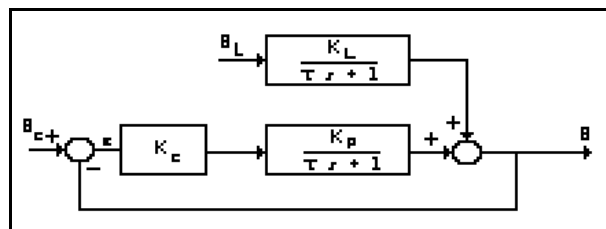


Figura 4 Control proporcional de un proceso de primer orden

En las condiciones establecidas, la ecuación general de un sistema de control

DINAMICA DE SISTEMAS, SIMULACION Y CONTROL

Capítulo 6

simplificada, [6], se puede aplicar haciendo $\theta_c = 0$ si se considera que sólo se produce una variación en la carga, con lo cual:

$$\theta = \frac{G_L}{1 + G} \theta_L \quad [11]$$

siendo en este caso:

$$G_L = \frac{K}{\tau s + 1} \quad [12]$$

$$G = K_c \frac{K_p}{\tau s + 1} \quad [13]$$

La función de transferencia del sistema será, pues:

$$\frac{\theta}{\theta_L} = \frac{K_L}{\tau s + 1 + K} \quad [14]$$

donde $K = K_c K_p$.

Si se aplica un escalón unitario a la entrada, $\theta_L = 1$, cuya transformada de Laplace es $1/s$, con lo que la respuesta del sistema vendrá dada por la ecuación:

$$\theta(s) = \frac{K_L}{s(\tau s + 1 + K)} \quad [15]$$

Dividiendo numerador y denominador por $1 + K$ se obtiene la ecuación transformable (**ver apartado 3.4.3: "Respuesta a escalón de sistemas de primer**

orden"):

$$\theta(s) = \frac{K_L}{1+K} \frac{1}{s \left(\frac{\tau}{1+K} s + 1 \right)} \quad [16]$$

cuya transformada inversa es:

$$\theta(t) = \frac{K_L}{1+K} (1 - e^{-t/\tau'}) \quad [17]$$

donde se ha hecho $\tau' = \tau/(1+K)$, que es una constante de tiempo efectiva.

Si el sistema no hubiese estado controlado, la respuesta hubiese sido, como ya se demostró anteriormente:

$$\theta(t) = K_L (1 - e^{-t/\tau}) \quad [18]$$

Así pues, el control proporcional ha introducido dos modificaciones importantes en la respuesta. En primer lugar, el nuevo estado estacionario que, sin control, vale K_L , toma ahora el valor de $K_L/(1+K)$, es decir, inferior al del estado estacionario sin control, pero sin ser nulo. Es decir, se ha logrado acercar el valor de la variable controlada al valor de consigna, pero se produce una desviación de éste, denominada **"separación residual permanente"** ("offset"), que será tanto menor cuanto mayor sea la ganancia del controlador, tal como muestra la [Figura 5](#).

Por otra parte, como a tiempos iguales, T , se cumple que:

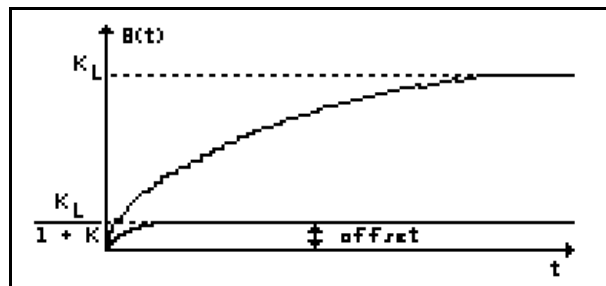


Figura 5 Respuesta de un sistema con control proporcional

$$1 - e^{-\frac{(1+K)T}{\tau}} > 1 - e^{-\frac{T}{\tau}}$$

[19]

si $K > 0$, resulta que se alcanza antes el estado estacionario con el sistema controlado.

Parece, pues, conveniente utilizar la mayor ganancia posible para el controlador, ya que la ecuación [17] no predice oscilaciones para la ganancia tendiendo a infinito. Sin embargo, ésto tiene un cierto límite, ya que, en un sistema real, la existencia de retrasos de respuesta en los diferentes elementos da lugar a respuestas oscilantes inestables cuando la ganancia supera un cierto valor máximo.

6.5.1.2 CONTROL TODO-NADA

Un caso especial de control proporcional es el control todo-nada ("on-off"). Si la ganancia del controlador, K_c , se hace muy alta, el actuador (válvula de control) se moverá de una posición extrema a la otra aunque se produzcan pequeñas variaciones en el punto de consigna. Esta actuación tan sensible se denomina "**acción todo-nada**", ya que la válvula de control está bien completamente abierta (todo) o completamente cerrada (nada). Este es el controlador más simple y barato que existe, siendo su banda proporcional aproximadamente cero.

6.5.2 CONTROL INTEGRAL

Con un control integral, la salida del controlador es proporcional a la integral de la señal de entrada o error, es decir:

$$y(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad [20]$$

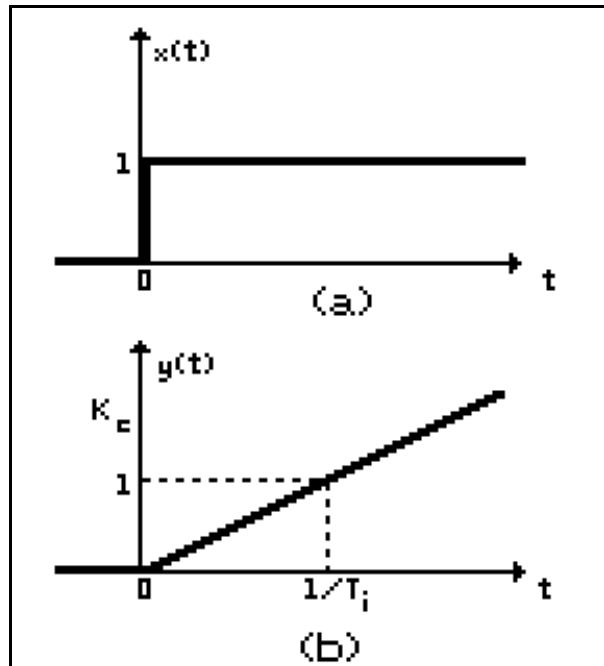


Figura 6 Respuesta a escalón del control integral

siendo T_i el llamado "**tiempo integral**", que es una constante ajustable. La transformada de Laplace de la ecuación [20] es:

$$Y(s) = \frac{1}{T_i s} \epsilon(s) \quad [21]$$

por lo que la función de transferencia de este controlador será:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{\epsilon(s)} = \frac{1}{T_i s} \quad [22]$$

En la [Figura 6](#) se representa la respuesta de este tipo de control a un escalón unitario que, como se ve, es una recta de pendiente T_i .

6.5.2.1 RESPUESTA DE UN PROCESO CON CONTROL INTEGRAL

Para analizar la respuesta de un proceso de primer orden con control integral, considérese el esquema de la [Figura 7](#), con los mismos supuestos hechos para el control proporcional.

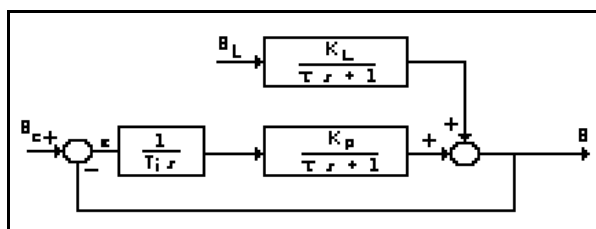


Figura 7 Control integral de un proceso de primer orden

Si sólo se produce una variación en la carga, la ecuación general del proceso será:

$$\frac{\theta}{\theta_L} = \frac{G_L}{1 + G} = \frac{K_L}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{T_i s (\tau s + 1)}} \quad [23]$$

Operando convenientemente se puede poner:

$$\frac{\theta}{\theta_L} = \frac{K_L T_i}{K} \cdot \frac{s}{\frac{T_i \tau}{K} s^2 + \frac{T_i}{K} s + 1} \quad [24]$$

Aplicando un escalón unitario a la entrada $[\theta_L(s) = 1/s]$, se obtiene:

$$\theta(s) = \frac{K_L T_i}{K} \cdot \frac{1}{\frac{T_i \tau}{K} s^2 + \frac{T_i}{K} s + 1} \quad [25]$$

ecuación correspondiente a un sistema de segundo orden de la forma general:

$$\theta(s) = \frac{K_L T_i}{K} \cdot \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_o^2} + \frac{2\gamma}{\omega_o} s + 1} \quad [26]$$

siendo:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{K}{T_i \tau}} \quad [27]$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_i}{\tau K}} \quad [28]$$

cuya transformada inversa o respuesta del sistema se ha visto que es (análisis de sistemas de segundo orden), para $\gamma < 1$, o sistema subamortiguado:

$$\theta(t) = \frac{K_L T_i}{K} \frac{\omega_o}{\sqrt{1 - \gamma^2}} e^{-\gamma \omega_o t} \text{sen}(\omega_o \sqrt{1 - \gamma^2} t) \quad [29]$$

pudiéndose calcular asimismo a partir de [\[26\]](#) la respuesta del sistema con amortiguamiento crítico, es decir, para $\gamma = 1$, lo que implica que $T_i = 4 K \tau$, que resulta ser:

$$\theta(t) = K_L \frac{t}{\tau} e^{-t/2\tau}$$

[30]

El efecto del coeficiente de amortiguamiento (o efecto del tiempo integral) se puede ver en la [Figura 8](#).

Como se puede observar, con el control integral no existe separación residual permanente, ya que el error es reducido a cero ($\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 0$), pero la respuesta del sistema es mucho más

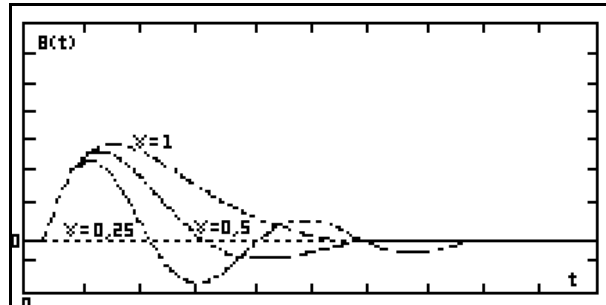


Figura 8 Respuesta de un sistema con control integral

lenta que la del control proporcional. Haciendo disminuir el tiempo integral, el coeficiente de amortiguamiento también disminuye y las oscilaciones se hacen más pronunciadas. A pesar de ello, la integral de error absoluto disminuye al hacerlo el tiempo integral, ya que la menor amplitud y mayor frecuencia de los picos compensa el mayor número de oscilaciones. En base al criterio de un error integrado mínimo, teóricamente sería lo mejor un tiempo integral lo más bajo posible. Sin embargo, muchos sistemas producen oscilaciones inestables a tiempos integrales bajos.

6.5.3 CONTROL PROPORCIONAL-INTEGRAL (PI)

Para mejorar las características de los controles proporcional e integral se suelen combinar ambos en un controlador del tipo PI, ya que este tipo de sistema es sólo un poco más caro que un control proporcional y la acción integral elimina la separación residual permanente que se produce debido a cambios de carga, ya que mientras aquella exista, continuará la acción correctora de tipo integral.

Cuando se utiliza esta combinación, a la constante T_i del control integral se le suele denominar "**tiempo de acción integral**" ("**reset time**"), que es el intervalo de tiempo en que, ante una señal de entrada en escalón, la parte de señal de salida debida a la acción integral iguala a la parte debida a la acción proporcional. Se expresa

en "minutos por repetición".

Matemáticamente existen las siguientes relaciones entre las señales de salida y entrada:

$$y(t) = K_c e(t) + \frac{K_c}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad [31]$$

$$Y(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) e(s) \quad [32]$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{e(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = \frac{K_c (T_i s + 1)}{T_i s} \quad [33]$$

donde K_c es la ganancia de la acción proporcional y T_i la constante de tiempo de la acción integral, ambas ajustables. La [Figura 9](#) muestra la respuesta del controlador PI a una entrada de tipo escalón unitario.

6.5.3.1 RESPUESTA DE UN PROCESO CON CONTROL PI

Considerando los mismos supuestos hechos anteriormente se tiene el esquema de la [Figura 10](#), para un control PI.

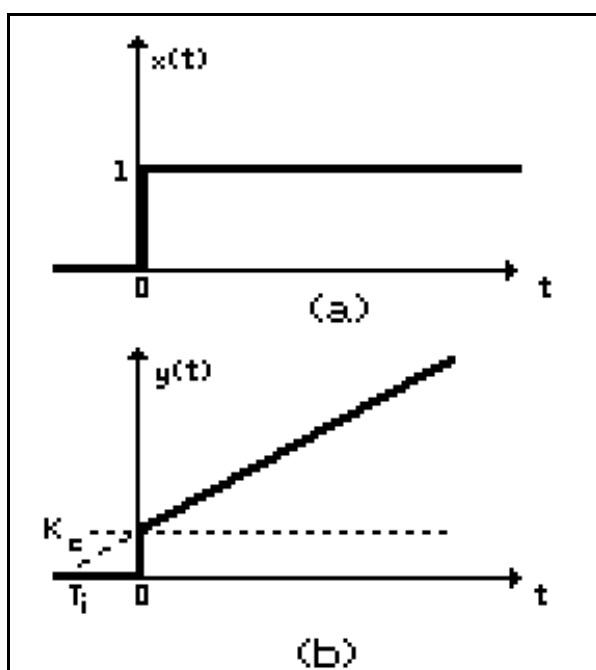


Figura 9 Respuesta a escalón del control PI

DINAMICA DE SISTEMAS, SIMULACION Y CONTROL

Capítulo 6

Para una variación en la carga, la ecuación general del proceso será:

$$\frac{\theta}{\theta_L} = \frac{G_L}{1 + G} = \frac{K_L}{\tau s + 1} \cdot \frac{T_i s (\tau s + 1)}{(T_i s) (\tau s + 1) + K_c K_p (T_i s + 1)} \quad [34]$$

Reordenando convenientemente y haciendo $K = K_c K_p$, se tendrá:

$$\frac{\theta}{\theta_L} = \frac{K_L T_i}{K} \cdot \frac{s}{\left(\frac{T_i}{K} \right) s^2 + \left(T_i \frac{K + 1}{K} \right) s + 1} \quad [35]$$

Aplicando un escalón unitario a la entrada y definiendo los parámetros:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{K}{T_i \tau}} \quad [36]$$

$$\gamma = \frac{K + 1}{2} \sqrt{\frac{T_i}{\tau K}} \quad [37]$$

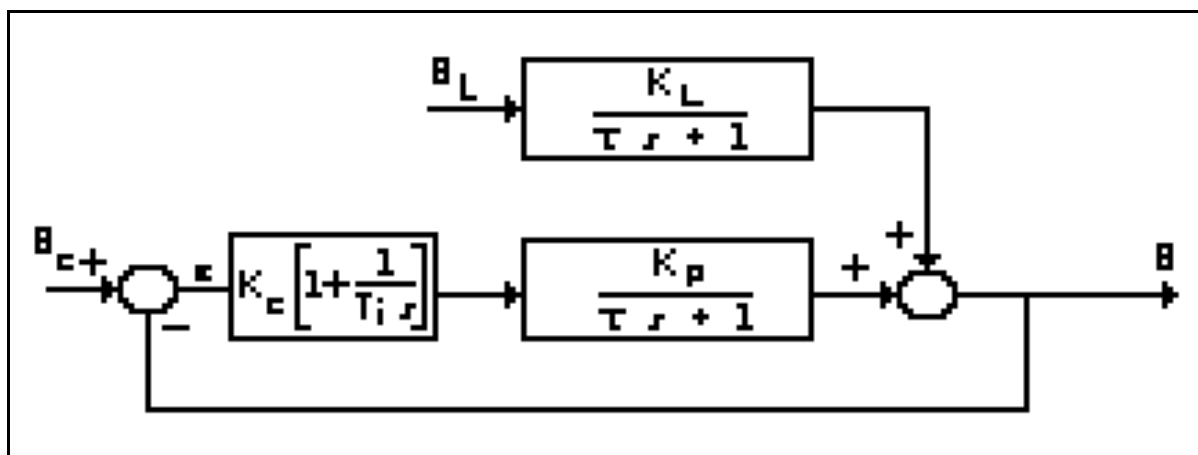


Figura 10 Control PI de un proceso de primer orden

se obtiene la ecuación:

$$\theta(s) = \frac{K_L T_i}{K} \cdot \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_o^2} + \frac{2 \gamma}{\omega_o} s + 1} \quad [38]$$

que al ser idéntica a la obtenida para el control integral, ecuación [26], permite obtener una respuesta temporal idéntica. La única diferencia que existe entre la respuesta del control PI y la del control integral, es que para aquél el coeficiente de amortiguamiento es $(K + 1)$ veces mayor, como se puede comprobar comparando las ecuaciones [28] y [37].

6.5.4 CONTROL PROPORCIONAL-DIFERENCIAL (PD)

La eficacia de los controladores proporcionales puede ser incrementada haciendo que la señal de salida varíe, no sólo proporcionalmente a la señal de entrada o error, sino también a la derivada de éste. A un regulador de tal clase se le denomina de tipo proporcional-diferencial (PD), siendo la representación matemática de su acción la siguiente:

$$y(t) = K_c e(t) + K_c T_d \frac{de(t)}{dt} \quad [39]$$

$$Y(s) = K_c (1 + T_d s) e(s) \quad [40]$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{e(s)} = K_c (1 + T_d s) \quad [41]$$

donde K_c es la ganancia de la acción proporcional y T_d la constante de tiempo de la acción diferencial, ambas regulables.

La [Figura 11](#) muestra la respuesta del controlador PD a un escalón unitario; la parte diferencial de la respuesta pasa teóricamente, en el instante $t = 0$, del valor 0 al valor ∞ , para volver al valor K_c , aunque en la práctica es imposible conseguir tal acción diferencial totalmente pura.

6.5.4.1 RESPUESTA DE UN PROCESO CON CONTROL PD

En este caso, las funciones de transferencia de la ecuación general simplificada para cambios en la carga serán:

$$G_L = \frac{K_L}{\tau s + 1} \quad [42]$$

$$G = K_c (1 + T_d s) \frac{K_p}{\tau s + 1} \quad [43]$$

con lo cual aquélla quedará de la forma:

$$\frac{\theta}{\theta_L} = \frac{G_L}{1 + G} = \frac{K_L}{(\tau + K_p K_c T_d) s + K_p K_c + 1} \quad [44]$$

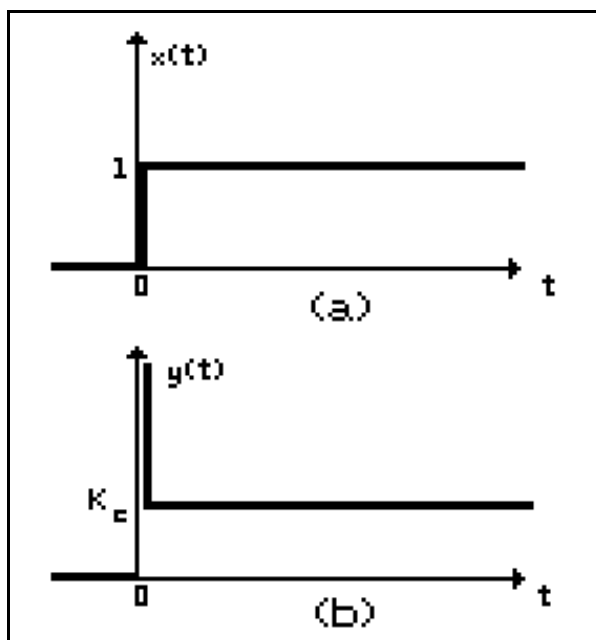


Figura 11 Respuesta a escalón del control PD

Aplicando un escalón unitario a la entrada y haciendo $K = K_c K_p$, se obtiene:

$$\Theta(s) = \frac{K_L}{1 + K} \cdot \frac{1}{s \left(\frac{\tau + K T_d}{1 + K} s + 1 \right)} \quad [45]$$

ecuación completamente análoga a la obtenida para el control proporcional, [16], cuya transformada inversa será, pues:

$$\Theta(t) = \frac{K_L}{1 + K} (1 - e^{-t/\tau'}) \quad [46]$$

donde se ha hecho $\tau' = (\tau + K T_d)/(1 + K)$, que es una constante de tiempo efectiva.

Obsérvese que la ecuación [46] tiene idéntica forma a la [17], obtenida para el control proporcional, y que indica que existe la misma separación residual permanente que para aquél. Sin embargo, al ser distintas las constantes de tiempo efectivas, siendo τ' para el control PD mayor, la velocidad de respuesta del sistema a la entrada en escalón será superior. A esto se debe que a la acción diferencial se le denomina también "**acción anticipadora**", ya que al actuar según el valor instantáneo de la pendiente de la curva $e(t)$, detecta anticipadamente la tendencia de la variable controlada proporcionando además la acción de control adecuada con mayor rapidez.

6.5.5 CONTROL PROPORCIONAL-INTEGRAL-DIFERENCIAL (PID)

Combinando las acciones de control de tipos proporcional, integral y diferencial se obtiene un regulador de tipo PID que, lógicamente, reúne las ventajas e inconvenientes de todas y cada una de las tres acciones de control consideradas aisladamente. Las ecuaciones que caracterizan el comportamiento de un controlador de este tipo son:

$$y(t) = K_c e(t) + \frac{K_c}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_c T_d \frac{de(t)}{dt} \quad [47]$$

$$Y(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) e(s) \quad [48]$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{e(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad [49]$$

Los parámetros K_c , T_i y T_d son ajustables, dependiendo del valor dado a cada uno de ellos el tipo de acción preponderante en la actuación del controlador. Teóricamente, con este tipo de control pueden conseguirse las acciones P, I, D individuales, sin más que anular las sobrantes, lo que en determinados casos pudiera constituir una ventaja con vistas a uniformar el equipo de control de una planta. En la [Figura 12](#) se muestra la respuesta del regulador PID a un escalón unidad.

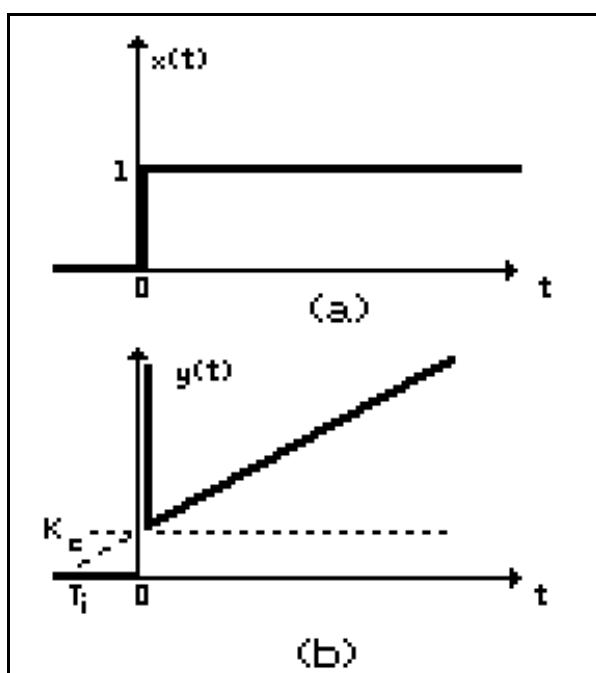


Figura 12 Respuesta a escalon del control PID

6.5.5.1 RESPUESTA DE UN PROCESO CON CONTROL PID

Para este tipo de control, las funciones de transferencia de la ecuación general simplificada para cambios en la carga serán:

$$G_L = \frac{K_L}{\tau s + 1} \quad [50]$$

$$G = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \frac{K_p}{\tau s + 1} \quad [51]$$

con lo cual se tendrá, haciendo $K = K_c K_p$:

$$\frac{\theta}{\theta_L} = \frac{G_L}{1 + G} = \frac{K_L}{\tau s + 1} \cdot \frac{(\tau s + 1) T_i s}{(\tau + K T_d) T_i s^2 + (1 + K) T_i s + K} \quad [52]$$

Aplicando la entrada en escalón, operando y definiendo los parámetros:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{K}{T_i (\tau + K T_d)}} \quad [53]$$

$$\gamma = \frac{K + 1}{2} \sqrt{\frac{T_i}{(\tau + K T_d) K}} \quad [54]$$

se obtiene la respuesta en el dominio de Laplace:

$$\theta(s) = \frac{K_L T_i}{K} \cdot \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_o^2} + \frac{2\gamma}{\omega_o} s + 1} \quad [55]$$

cuya transformada inversa permite obtener:

$$\theta(t) = \frac{K_L T_i}{K} \frac{\omega_o}{\sqrt{1-\gamma^2}} e^{-\gamma \omega_o t} \text{sen} (\omega_o \sqrt{1-\gamma^2} t) \quad [56]$$

ecuación formalmente idéntica a la obtenida para el control integral, [29] y para el control PI, pero con una frecuencia de oscilación menor que éste (comparar ecuaciones [53] y [27]) y con un coeficiente de amortiguamiento asimismo menor (comparar ecuaciones [54] y [28], ambos hechos representando mejoras en el control. Así, para el PID se obtendrá mayor velocidad de respuesta, menor sobreoscilación y separación residual permanente nula.

6.6 COMPARACION DE LAS ACCIONES DE CONTROL

Con objeto de comparar las acciones de control estudiadas en el apartado anterior, considérese la [Figura 13](#), que muestra el comportamiento de un sistema típico de control con realimentación que utiliza los diferentes tipos de control, al ser sometido a una perturbación permanente.

El valor de la variable controlada aumenta desde el instante inicial de la perturbación, debido a la presencia de ésta. Si no se ejecuta ningún control, la variable sigue aumentando hasta alcanzar un nuevo estado estacionario. Si se controla el proceso, después de algún tiempo el sistema de control empieza a actuar intentando mantener la variable controlada próxima al valor existente antes de la perturbación.

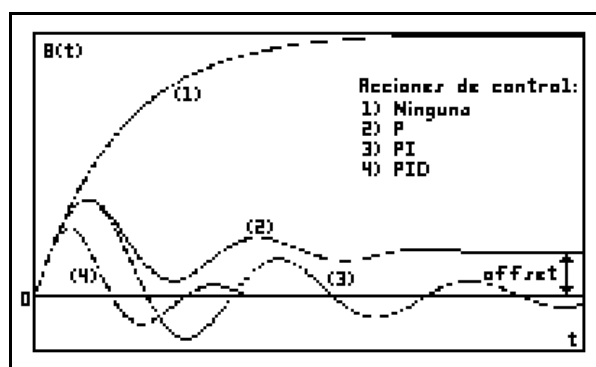


Figura 13 Respuesta de un sistema típico de control mostrando el efecto de varias acciones de control

Con sólo acción proporcional, el sistema de control es capaz de compensar el aumento de la variable controlada y llevarla finalmente hasta un nuevo estado estacionario, diferente al original. La diferencia entre el valor de este nuevo estado

estacionario y el valor original se ha denominado "**separación residual permanente**".

Como se muestra mediante la curva PI, la adición de acción integral elimina la separación residual permanente, y la variable controlada vuelve finalmente a su valor original. Esta ventaja de la acción integral contrasta con el inconveniente de introducir un comportamiento más oscilatorio.

La adición de acción diferencial a la acción PI le da una mejora definitiva a la respuesta. El aumento de la variable controlada es contrarrestado más rápidamente y aquélla vuelve a su valor original con una oscilación muy pequeña o nula.

La elección entre los sistemas de control citados depende de cada aplicación particular. Si el proceso puede tolerar una pequeña separación residual permanente, se elige preferentemente la acción proporcional, ya que un controlador proporcional simple es mucho más barato. Si el proceso no puede tolerar separación residual permanente, sería necesario añadir la acción integral. Si hay que eliminar excesivas oscilaciones, habrá que añadir también la acción diferencial.

La adición de cada acción de control significa un mayor coste y además una mayor complejidad en el ajuste del controlador, como se verá en capítulos posteriores, aunque la decisión estará siempre gobernada por la economía.

6.7 EFECTO DEL TIEMPO MUERTO

En los sistemas de control automático existen, además de los elementos ya descritos, otros, denominados de "**retardo puro**", que presentan la propiedad de que al producirse una variación en su señal de entrada, ésta no aparece en la señal de salida hasta transcurrido un determinado período de tiempo, L , llamado "**tiempo de retardo**" o "**tiempo**

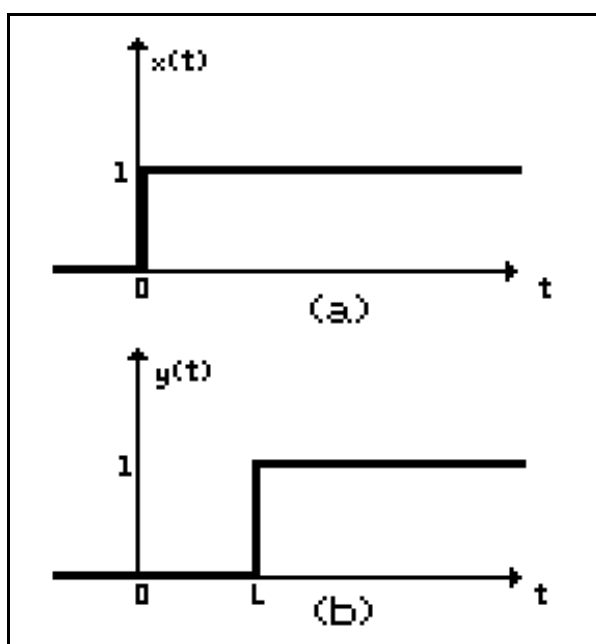


Figura 14 Respuesta a escalón del tiempo muerto

muerto". Tal fenómeno se produce normalmente en procesos de regulación donde tienen lugar operaciones de transporte de materia o energía a grandes distancias. La causa de tal fenómeno es la velocidad limitada con la que se propaga la señal de entrada desde su origen hasta la salida del elemento.

Como se ha visto en el **Capítulo 2**, la función de transferencia del tiempo muerto es:

$$G(s) = e^{-Ls} \quad [57]$$

mientras que en la [Figura 14](#) se ha representado la respuesta de este elemento a un escalón unitario.

El tiempo muerto tiene un efecto desestabilizador sobre los sistemas de control, más que añadirle una constante de tiempo del mismo orden de magnitud. Además, la respuesta transitoria del tiempo muerto no se puede obtener con facilidad, ya que el número de raíces es infinito, como demuestra el desarrollo en serie:

$$e^{-Ls} = 1 - Ls + \frac{(Ls)^2}{2!} - \frac{(Ls)^3}{3!} + \dots \quad [58]$$

Para salvar este inconveniente se realiza una aproximación de la función de transferencia del tiempo muerto, de forma que resulte una función algebraica racional. La aproximación más sencilla, pero menos precisa, es utilizar directamente el desarrollo en serie [\[58\]](#) sólo con los dos primeros términos:

$$e^{-Ls} \approx 1 - Ls \quad [59]$$

que puede ser reducida a la forma:

$$e^{-Ls} = \frac{1}{e^{Ls}} \approx \frac{1}{1 + Ls} \quad [60]$$

Obsérvese que en este caso, la ecuación [60] aproxima el elemento tiempo muerto a un elemento de primer orden de retardo. Naturalmente, la validez de las aproximaciones propuestas dependerá de que los valores de L y s sean lo suficientemente pequeños como para justificar las eliminaciones de términos realizadas. Las aproximaciones [59] y [60] serán válidas para $Ls < 1$; para valores superiores a la unidad son bastante inexactas.

Una de las aproximaciones más exactas es, por otro lado, la siguiente:

$$e^{-Ls} = \frac{e^{-Ls/2}}{e^{+Ls/2}} = \frac{1 - \frac{L}{2}s + \frac{1}{2!}\left(\frac{L}{2}\right)^2 s^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{L}{2}\right)^3 s^3 + \dots}{1 + \frac{L}{2}s + \frac{1}{2!}\left(\frac{L}{2}\right)^2 s^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{L}{2}\right)^3 s^3 + \dots} \quad [61]$$

Limitando los desarrollos del numerador y denominador en diversos términos se obtienen aproximaciones más o menos exactas. Así, considerando los polinomios de primer grado, se obtiene una de las expresiones más utilizadas por su simplicidad y suficiente exactitud (aproximación de Padé):

$$e^{-Ls} = \frac{1 - Ls/2}{1 + Ls/2} \quad [62]$$

CAPITULO 7

ESTABILIDAD

7.1 OBJETIVOS	<u>1</u>
7.2 DEFINICION DE ESTABILIDAD EN SISTEMAS LINEALES	<u>1</u>
7.3 LA SITUACION DE LAS RAICES DE LA ECUACION CARACTERISTICA COMO CRITERIO DE ESTABILIDAD	<u>2</u>
7.4 RELACION ENTRE LAS FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO Y LAZO CERRADO	<u>5</u>
7.5 CRITERIO DE ESTABILIDAD DE ROUTH	<u>9</u>

7.1 OBJETIVOS

Para los sistemas estudiados hasta ahora, tanto en lazo abierto como en lazo cerrado, la respuesta global a una perturbación en la entrada nunca ha sido de orden superior al segundo; sin embargo, la mayoría de los sistemas de control son de orden superior.

Se demostrará en primer lugar que un sistema de segundo orden o inferior siempre es estable, mientras que los sistemas de orden superior al segundo pueden mostrar condiciones de inestabilidad, entendiéndose por estabilidad la capacidad que tiene un sistema para amortiguar con el tiempo y anular totalmente las oscilaciones de la respuesta ante una perturbación.

Asimismo se desarrollarán los criterios de estabilidad que relacionen ésta con las raíces de la ecuación característica del sistema y que permitirá asimismo obtener la respuesta temporal de sistemas complejos.

7.2 DEFINICION DE ESTABILIDAD EN SISTEMAS LINEALES

Para los propósitos de este estudio, un sistema se define como estable si su respuesta está acotada para todas las entradas acotadas. Una función acotada de entrada es aquella función del tiempo que siempre está dentro de ciertos límites con el transcurso del tiempo. Por ejemplo, la función escalón o la función sinusoidal son entradas acotadas; obviamente las funciones rampa o parábola no lo son.

A pesar de que la definición de un sistema inestable establece que su salida no esté acotada, ello sólo es cierto en sentido matemático, ya que un sistema físico real siempre presenta acotaciones o restricciones. Un modelo matemático lineal (conjunto de ecuaciones diferenciales lineales que describe el sistema) que permite obtener información sobre la estabilidad de un sistema, sólo tiene sentido en un cierto intervalo de las variables.

Por ejemplo, una válvula lineal de control sólo da una relación lineal entre la presión suministrada y el flujo, en el rango de valores de flujo comprendido entre la válvula totalmente cerrada y la válvula totalmente abierta. Cuando sucede esto último,

un aumento posterior de la presión suministrada a la válvula no aumentará el flujo. Esta limitación se conoce generalmente como "**saturación**".

Un sistema físico, cuando es inestable, puede ser que no siga la respuesta de su modelo matemático fuera de ciertos límites físicos, sino que sature. Sin embargo, la predicción de estabilidad mediante el modelo lineal es de importancia fundamental en un sistema de control real, ya que la operación del mismo con la válvula completamente cerrada o completamente abierta es una forma de control claramente insatisfactoria.

7.3 LA SITUACION DE LAS RAICES DE LA ECUACION CARACTERISTICA COMO CRITERIO DE ESTABILIDAD

Considérese un sistema lineal representado por la ecuación diferencial de orden n :

$$a_n \frac{d^n c}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dc}{dt} + a_0 = r(t) \quad [1]$$

La solución de esta ecuación diferencial es la suma de una solución particular y una solución complementaria:

$$c = c_p + c_c \quad [2]$$

siendo la solución complementaria aquella que satisface la ecuación diferencial homogénea correspondiente, es decir, la ecuación [1] con $r(t) = 0$.

La solución complementaria es la suma de n términos exponenciales, que al igualarlos a cero, constituyen la denominada "**ecuación característica del sistema**", es decir:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad [3]$$

Existirán n raíces s de la ecuación característica, algunas de las cuáles pueden ser repetidas. Factorizando [3] se obtiene:

$$(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) \dots (s - s_{n-1})(s - s_n) = 0 \quad [4]$$

donde s_i son las raíces del polinomio.

La solución complementaria del sistema (para todas las raíces distintas, no repetidas) será:

$$x_c(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \dots + c_n e^{s_n t} \quad [5]$$

con lo cual, la solución total es:

$$c(t) = c_p(t) + \sum_{i=1}^N c_i e^{s_i t} \quad [6]$$

Las raíces s_i pueden ser reales o complejas; pero si son complejas, tienen que aparecer como pares conjugados (aquéllos que sumados o multiplicados dan números reales, es decir $s = a \pm bj$), ya que los coeficientes a_i tienen que ser reales por ser [3] la ecuación característica de un sistema físico real.

Si las raíces son complejas, la solución complementaria contendrá los términos oscilatorios dados por las partes imaginarias, ya que:

$$e^{(a + j b)t} = e^{at} (\cos bt + j \sin bt) \quad [7]$$

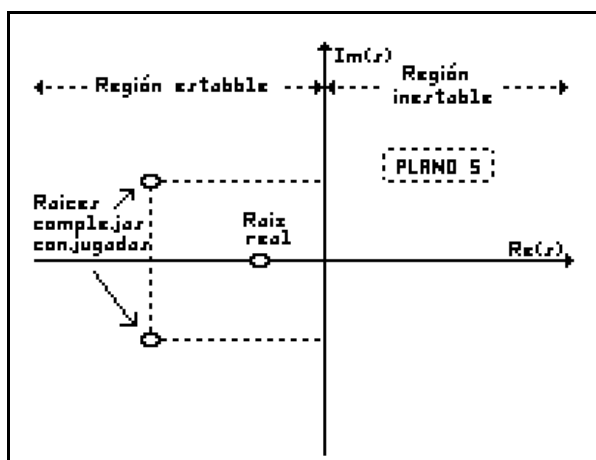


Figura 1 Plano s de las raíces de la ecuación característica de un sistema

con lo cual, la estabilidad del sistema viene dada por los valores reales de las raíces s . El sistema será estable, si las partes reales de todas las raíces son negativas, ya que los términos exponenciales se anulan al tender a infinito el tiempo.

Las raíces de la ecuación característica se suelen representar en una gráfica llamada "**plano s** ", cuya ordenada es la parte imaginaria de las raíces s y cuya abscisa es la parte real de las raíces s , tal como se muestra en la [Figura 1](#).

Así pues, se define como sistema estable aquél en el que todas las raíces de su ecuación característica están a la izquierda del plano s .

Si se recuerda ahora la ecuación diferencial completa de un sistema de orden n :

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n c}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dc}{dt} + a_0 c &= \\ = b_m \frac{d^m r}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr}{dt} + b_0 r \end{aligned} \quad [8]$$

cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad [9]$$

se puede obtener que el denominador es un polinomio en s que es el mismo que la ecuación característica del sistema. Las raíces del denominador se denominan "**polos**" de la función de transferencia. Las raíces del numerador se denominan "**ceros**" de la función de transferencia. Así pues, factorizando numerador y denominador:

$$G(s) = \left(\frac{b_m}{a_n} \right) \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad [10]$$

donde z_i son los ceros y p_i son los polos.

Según lo visto anteriormente, los polos de la función de transferencia han de ser reales o complejos conjugados. Además, las partes reales de todos los polos han de ser negativas para que el sistema sea estable, es decir, los polos tienen que estar todos en la parte izquierda del plano s .

La posición de los ceros evidentemente afectará a la respuesta dinámica del sistema, pero su posición no tendrá efecto sobre su estabilidad.

Finalmente, si la ecuación característica tiene polos reales múltiples, es decir, raíces repetidas, la solución complementaria del sistema tendrá un término adicional de la forma:

$$\left(\frac{a_r}{(r-1)!} t^{r-1} + \frac{a_{r-1}}{(r-2)!} t^{r-2} + \dots + a_2 t + a_1 \right) e^{-s_i t} \quad [11]$$

donde r es el número de repeticiones de la raíz y a_i son constantes determinables por derivación. Evidentemente, la existencia de potencias en t hace que estas raíces produzcan un crecimiento continuo de la función $c(t)$ y el sistema se vuelve inestable.

7.4 RELACION ENTRE LAS FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO Y LAZO CERRADO

Considérese el sistema representado en la [Figura 2](#), cuya ecuación general frente a cambios en el punto de consigna y en la carga puede ponerse de la forma:

$$C = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H} R + \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H} U \quad [12]$$

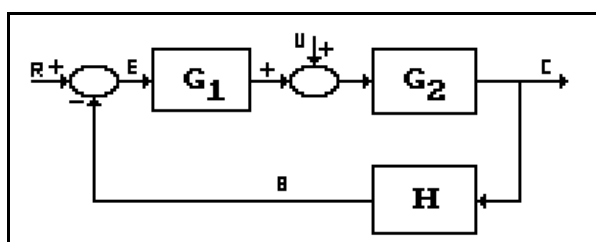


Figura 2 Sistema de control básico de lazo simple

DINAMICA DE SISTEMAS, SIMULACION Y CONTROL

Capítulo 7

Con objeto de simplificar la nomenclatura se hará:

$$G = G_1 G_2 H \quad [13]$$

denominándose G "**función de transferencia en lazo abierto**", ya que relaciona la variable medida, C, con el punto de consigna, R, si se desconecta el lazo de realimentación del comparador, es decir, si el lazo se abre. Así, en términos de la función de transferencia de lazo abierto, G, la ecuación [12] se transforma en:

$$C = \frac{G_1 G_2}{1 + G} R + \frac{G_2}{1 + G} U \quad [14]$$

Para determinar bajo qué condiciones el sistema representado por la ecuación [14] es estable, será necesario obtener la respuesta del mismo a una entrada acotada, que se supondrá un escalón unitario aplicado al punto de consigna. En estas condiciones se tendrá:

$$C(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G} \frac{1}{s} = \frac{G_1 G_2 F(s)}{s(s - r_1)(s - r_2) \dots (s - r_n)} \quad [15]$$

siendo r_i las n raíces de la "**ecuación característica de lazo cerrado**":

$$1 + G(s) = 0 \quad [16]$$

y F(s) una función que aparece al reordenar la ecuación [15] en forma factorizada.

Supóngase que el sistema repre

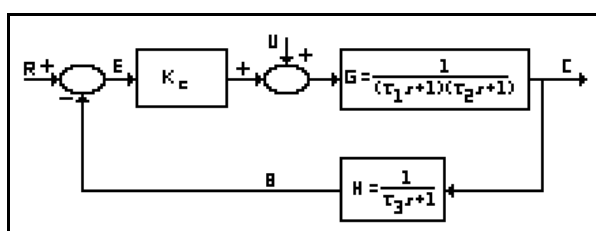


Figura 3 Sistema de control de tercer orden

sentado por la [Figura 2](#) está formado por un controlador proporcional, un proceso de segundo orden y un elemento medidor representado por una función de transferencia de primer orden, es decir el sistema global es de tercer orden, tal como se muestra en la [Figura 3](#).

La respuesta al escalón en el punto de consigna de este sistema será:

$$C(s) = \frac{G_1 G_2}{s(1+G)} = \frac{\frac{K_c}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}}{s \left(1 + \frac{K_c}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)} \right)} \quad [17]$$

que puede reordenarse de la forma:

$$C(s) = \frac{K_c (\tau_3 s + 1)}{s [\tau_1 \tau_2 \tau_3 s^3 + (\tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_2 \tau_3) s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) s + (1 + K_c)]} \quad [18]$$

expresión equivalente a:

$$C(s) = \frac{\frac{K_c (\tau_3 s + 1)}{\tau_1 \tau_2 \tau_3}}{s(s - r_1)(s - r_2)(s - r_3)} \quad [19]$$

donde r_1, r_2, r_3 son las raíces de la ecuación característica:

$$\tau_1 \tau_2 \tau_3 s^3 + (\tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_2 \tau_3) s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) s + (1 + K_c) = 0 \quad [20]$$

Como se vió en el apartado anterior, si alguna de las raíces de [\[20\]](#) está en la parte derecha del plano complejo, la respuesta contendrá un término que crece exponencialmente con el tiempo y el sistema es inestable. Si hay una o más raíces en

el origen, existirá un término s^m en el denominador de la ecuación [15] (siendo $m \geq 2$) y la respuesta no está acotada, creciendo polinómicamente con el tiempo. Si existen pares conjugados de las raíces, la contribución a la respuesta global es una senoide pura, que está acotada.

Evidentemente, y según la ecuación [12], todo el razonamiento realizado para un escalón en el punto de consigna es válido para un escalón en la carga, y sólo depende de $G(s)$, la función de transferencia en lazo abierto. Además, aunque el razonamiento se haya hecho para una entrada en escalón, sigue siendo válido para cualquier tipo de señal de entrada. Ello es cierto, primero, por la propia definición de estabilidad y segundo, porque si existe una raíz de la ecuación característica en la parte derecha del plano complejo, ésta contribuirá como factor de inestabilidad para cualquier señal de entrada.

En definitiva, si alguna de las raíces de la ecuación característica $1+G = 0$ está en la parte derecha del plano s , el sistema es inestable en lazo cerrado, mientras que si ello sucede para la ecuación $G = 0$, el sistema será inestable en lazo abierto. Como se puede observar, pues, los criterios de estabilidad son diferentes para lazo abierto y lazo cerrado.

La mayoría de los sistemas físicos son estables en lazo abierto pero pueden serlo o no en lazo cerrado, dependiendo de los valores de los parámetros del controlador.

Asimismo, y según las consideraciones hechas sobre las raíces de la ecuación característica de un sistema se podría afirmar que un sistema de primer orden siempre es estable, ya que su ecuación característica :

$$\tau s + 1 = 0 \quad [21]$$

tiene la raíz $s = -1/\tau$, que siempre será negativa.

Por su parte, un sistema de segundo orden, cuya ecuación característica es:

$$\tau^2 s^2 + 2 \tau \gamma s + 1 = 0 \quad [22]$$

asimismo es estable, ya que sus dos raíces son:

$$s = -\frac{\gamma}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\tau} \quad [23]$$

y la parte real siempre es negativa, ya que $\gamma > 0$.

En el caso de sistemas de tercer orden, cabe la posibilidad de existencia de raíces reales iguales, apareciendo, por tanto, términos en potencias de t que hacen inestable el sistema. Evidentemente, si todas las raíces son distintas, el sistema será estable.

7.5 CRITERIO DE ESTABILIDAD DE ROUTH

El criterio de estabilidad de Routh es un método puramente algebraico para determinar cuántas raíces de la ecuación característica tienen partes reales positivas. De aquí se puede determinar asimismo si el sistema es estable, ya que de no haber raíces con partes reales positivas, el sistema será estable. A continuación se indica el método, aunque la demostración matemática se sale del contexto de este estudio.

El procedimiento para examinar las raíces es escribir la ecuación característica de la forma:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad [24]$$

siendo el primer coeficiente, a_0 , positivo, y se forma una matriz con los coeficientes. El número de filas es el grado de la ecuación más uno, es decir si el grado es n , habrá $n + 1$. La matriz y los coeficientes son los indicados en la [Figura 4](#).

Capítulo 7. .

$$a_1 \ a_3 \ a_5 \ \dots$$

$$b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots$$

$$c_1 \ c_2 \ c_3 \ \dots$$

$$d_1 \ d_2 \ \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$0$$

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_o & a_2 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_2 - a_o a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ a_o & a_4 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_4 - a_o a_5}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$d_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{c_1} = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{c_1} = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

Figura C1 Matriz de Routh

El sistema es estable si todos los elementos de la primera columna de la matriz de coeficientes son positivos. Cuando esto se cumple, las raíces de la ecuación característica tienen la parte real negativa. Si hay cambios de signo, su número indica el número de raíces con parte real positiva.

El criterio de estabilidad de Routh es muy útil, pero también muy limitado. En efecto, no da información ni del grado de estabilidad del sistema ni de cuáles son las raíces de la ecuación característica. Otra limitación de este método es la necesidad de expresar la ecuación característica explícitamente como un polinomio en s , lo que significa que no es aplicable a sistemas que contengan tiempo muerto y difícil de aplicar para sistemas de orden elevado. Ello hace necesaria la utilización de métodos más precisos para el análisis del comportamiento del sistema y el consiguiente diseño de sistemas de control.

CAPITULO 8
ANALISIS DE ESTABILIDAD, I:
METODO DEL LUGAR DE LAS RAICES

8.1 OBJETIVOS	<u>1</u>
8.2 ECUACIONES BASICAS DEL LUGAR DE LAS RAICES	<u>2</u>
8.2.1 CONSTRUCCION DEL LUGAR DE LAS RAICES	<u>4</u>
8.3 REGLAS PARA EL TRAZADO DEL LUGAR DE LAS RAICES	<u>6</u>
8.4 ADICION DE POLOS Y CEROS	<u>14</u>
8.4.1 ADICION DE POLOS	<u>14</u>
8.4.2 ADICION DE CEROS	<u>17</u>
8.5 SISTEMAS CON TIEMPO MUERTO	<u>20</u>
8.6 CONTORNO DE LAS RAICES	<u>23</u>

8.1 OBJETIVOS

Como ya es sabido, la respuesta transitoria de un sistema de control viene determinada por la posición sobre el plano complejo de las raíces de su ecuación característica. Para poder situar estas raíces, que no son conocidas, sobre el plano complejo, es necesario poner en forma factorizada la ecuación característica, lo cual resulta siempre laborioso y complicado. Tal circunstancia, unida a que si variase alguno de los parámetros de la función de transferencia en lazo abierto, habría que repetir el proceso de factorización, ha favorecido el desarrollo de métodos gráficos que, como el del lugar de las raíces, resuelvan el problema con mayor facilidad y eficacia.

El método del lugar de las raíces consiste en un conjunto de reglas, de aplicación directa, mediante las cuáles se puede determinar la posición de las raíces de la ecuación característica, cuando uno o varios parámetros de la función de transferencia del sistema en lazo abierto varían de $-\infty$ a $+\infty$. El lugar de las raíces facilita información, no sólo sobre la estabilidad y precisión de un sistema, sino también sobre la naturaleza de su respuesta transitoria. Si el sistema es inestable o tiene una respuesta transitoria inadecuada, el lugar de las raíces indica la forma en que ésta puede ser mejorada, dando a su vez una idea cualitativa del efecto que causarían los posibles cambios a introducir.

Los inconvenientes del método son, por un lado, su dificultad de aplicación a sistemas conteniendo tiempo muerto y la necesidad de un conocimiento razonablemente aproximado de la función de transferencia teórica del sistema.

Por otro lado, aunque el lugar de las raíces de la ecuación característica cuando la ganancia K varía entre $-\infty$ y $+\infty$ es lo que se llama el "**lugar de las raíces**", cabe distinguir entre las siguientes definiciones:

- * Lugar de las raíces: porción del lugar de las raíces cuando K es positiva, es decir $0 \leq K < +\infty$.
- * Lugar inverso de las raíces: porción del lugar de las raíces cuando K es negativa, es decir $-\infty < K \leq 0$.
- * Contorno de las raíces (lugar de las raíces generalizado): lugar de las raíces

cuando varía más de un parámetro.

8.2 ECUACIONES BASICAS DEL LUGAR DE LAS RAICES

Sea el sistema realimentado de la [Figura 1](#), cuya función de transferencia en lazo cerrado es:

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) H(s)} \quad [1]$$

El método del lugar de las raíces facilita la solución de la ecuación característica:

$$1 + G(s) H(s) = 0 \quad [2]$$

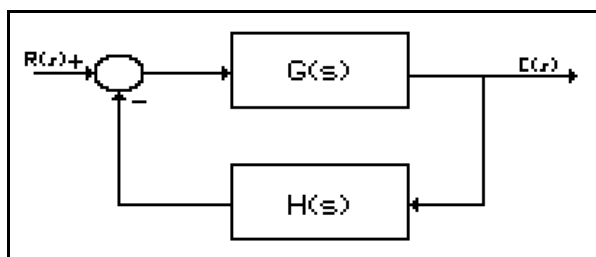


Figura 1 Sistema simple de control

cuando ésta no puede ser resuelta por los métodos analíticos convencionales. La ecuación [\[2\]](#) puede también expresarse de la forma:

$$G(s) H(s) = -1 \quad [3]$$

siendo la idea fundamental del método del lugar de las raíces el desdoblar la ecuación [\[3\]](#) en otras dos que expresen, separadamente, las condiciones e igualdad de módulo e igualdad de argumento entre ambos miembros de la mencionada ecuación.

En tal caso, deberá cumplirse para que se verifique la relación [\[3\]](#), que el módulo de la función compleja $G(s)H(s)$ sea igual a la unidad y su argumento sea igual a un múltiplo impar de π radianes. Estos dos criterios se conocen como "**criterio del módulo**" y "**criterio del argumento**", respectivamente, quedando expresados analíticamente por las ecuaciones:

$$|G(s) H(s)| = 1 \quad [4]$$

$$\arg[G(s) H(s)] = (2q + 1) \pi \quad \{ q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \} \quad [5]$$

Como se ha visto en el **Capítulo 7**, la función $G(s)H(s)$ es, normalmente, una función algebraica racional de la forma:

$$G(s) H(s) = K \frac{Z(s)}{P(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \quad [6]$$

siendo K la ganancia, $-z_i$ los ceros y $-p_i$ los polos de la mencionada función.

Sustituyendo [6] en [4] y [5] se tendrá, como expresiones analíticas de ambos criterios, las siguientes:

$$|G(s) H(s)| = \frac{|K| \prod_{i=1}^m |s + z_i|}{\prod_{i=1}^n |s + p_i|} = 1 \quad [7]$$

$$\arg[G(s) H(s)] = \arg[K] + \sum_{i=1}^m \arg[s + z_i] - \sum_{i=1}^n \arg[s + p_i] = (2q + 1) \pi \quad [8]$$

Según sea la ganancia K positiva o negativa, la relación [8] se desdobla en:

$$\arg[G(s) H(s)] = \sum_{i=1}^m \arg[s + z_i] - \sum_{i=1}^n \arg[s + p_i] = (2q+1)\pi \quad |K > 0| \quad [9]$$

$$\arg[G(s) H(s)] = \sum_{i=1}^m \arg[s + z_i] - \sum_{i=1}^n \arg[s + p_i] = 2q\pi \quad |K < 0| \quad [10]$$

El diagrama del lugar de las raíces está formado por todos los puntos cuyos valores de la variable compleja s satisfacen el criterio del argumento expresado por la relación [9]. El lugar inverso de las raíces, igualmente, estará formado por todos los puntos que satisfacen el criterio expresado por [10]. Una vez satisfecho el criterio del argumento, se puede observar el valor de K que corresponde a un punto del lugar de las raíces, obligando a que cumpla el criterio del módulo, expresado por la relación [7], para el punto considerado.

8.2.1 CONSTRUCCION DEL LUGAR DE LAS RAICES

La construcción del lugar geométrico de los puntos del plano s que cumplen el criterio del argumento puede realizarse gráficamente situando sobre el mencionado plano los polos y ceros de la función de transferencia en lazo abierto, $G(s)H(s)$, eligiendo un punto cualquiera y comprobando si se cumple la relación [8].

Si la función de transferencia en lazo abierto es, por ejemplo, del tipo:

$$G(s) H(s) = \frac{K (s + z_1) (s + z_2)}{s (s + p_1) (s + p_2)} \quad |K > 0| \quad [11]$$

cuya situación de polos y ceros es la representada en la [Figura 2](#), y s_i es el punto que se desea comprobar si pertenece al lugar de las raíces, para este punto la función de transferencia tomaría el valor:

$$G(s_i) H(s_i) = \frac{K (s_i + z_1) (s_i + z_2)}{s_i (s_i + p_1) (s_i + p_2)} \quad [12]$$

Gráficamente, esta ecuación puede ser representada por los vectores de la **Figura 2**, siendo:

$$\alpha = s_i + z_1$$

$$\beta = s_i + z_2$$

$$\gamma = s_i$$

$$\delta = s_i + p_1$$

$$\epsilon = s_i + p_2$$

[13]

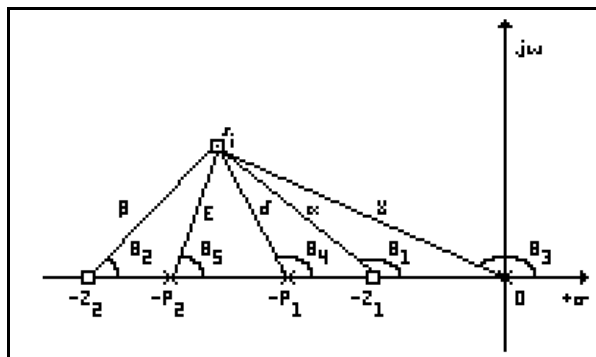


Figura 2 Configuración de polos y ceros para la función $G(s)H(s)$

El argumento de $G(s_i)H(s_i)$ será:

$$\arg[G(s_i)H(s_i)] = \theta_1 + \theta_2 - (\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)$$

[14]

Si dicho argumento es igual a $(2q+1)\pi$ para $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, el punto s_i pertenecerá al lugar de las raíces; si no lo fuera, no pertenecería, debiendo tomarse otro punto y repetir el mismo proceso hasta hallar uno que pertenezca.

Una vez hallado un punto que pertenezca al lugar de las raíces quedarán perfectamente determinados los módulos y argumentos de los vectores, con lo que podrá determinarse el valor de la ganancia K que le corresponde, haciendo que se cumpla el criterio del módulo:

$$|G(s_i)H(s_i)| = \frac{K |s_i + z_1| |s_i + z_2|}{|s_i| |s_i + p_1| |s_i + p_2|} = 1 = \frac{K |\alpha| |\beta|}{|\gamma| |\delta| |\epsilon|}$$

[15]

Como se habrá observado, la construcción del lugar de las raíces por el procedimiento expuesto entraña dos pasos: la determinación de los puntos s_i que cumplen el criterio del argumento, y la determinación del valor de la ganancia K

correspondiente mediante el criterio del módulo.

Afortunadamente, el trazado del lugar de las raíces no requiere la búsqueda de un numero infinito de puntos pertenecientes a él, como parece desprenderse del procedimiento descrito. Por el contrario, existen una serie de reglas que controlan el mencionado trazado, lo que facilita enormemente su construcción.

8.3 REGLAS PARA EL TRAZADO DEL LUGAR DE LAS RAICES

Como paso previo al desarrollo de las reglas para el trazado del lugar de las raíces, interesa poner la ecuación característica en la forma más adecuada para su interpretación. Para ello se parte de la función de transferencia en lazo abierto definida según la ecuación [6] y haciendo uso de la expresión [2] de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado, se podrá poner:

$$1 + K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = 0 \quad [16]$$

El trazado del lugar de las raíces consistirá, pues, en determinar las curvas que describen las raíces del ecuación [16] cuando la ganancia varia entre 0 e ∞ . Para ello se estudiarán las relaciones que ligan los polos (gráficamente x) y los ceros (gráficamente o) de la función de transferencia en lazo abierto con las raíces de la ecuación característica, lo que dará lugar a un conjunto de reglas que facilitan mucho el trazado. Todas ellas son fácilmente demostrables, pero las demostraciones no se considerarán aquí.

Regla n° 1: Número de ramas

El número de ramas independientes del lugar de las raíces es igual al número de polos de la función de transferencia en lazo abierto, n.

Regla n° 2: Puntos de comienzo y final

Cada rama del lugar de las raíces comienza en un polo de la función de transferencia, para el cual $K = 0$, y termina en un cero de la misma, para el cual $K = \infty$. Si el número de ceros, m , es inferior al número de polos, n , existirá un número de ceros en el infinito igual a la diferencia $(n-m)$ entre ambos.

Regla n° 3: Comportamiento en el eje real

Un punto situado sobre el eje real pertenecerá al lugar de las raíces ($K > 0$) si el número de polos y ceros situados a la derecha del mismo es impar (sin contar los polos complejos conjugados). Para el lugar inverso ($K < 0$), el número de ceros y polos situados a la derecha del punto habrá de ser par.

Regla n° 4: Simetría

El diagrama del lugar de las raíces y del lugar inverso son siempre simétricos respecto al eje real.

Regla n° 5: Asíntotas

Las ramas del lugar de las raíces que terminan en el infinito son asíntotas, para grandes valores de s , a rectas cuyos ángulos con el eje real vienen dados por:

$$\theta_a = \frac{(2q + 1)\pi}{n - m} \quad (K > 0) \quad [17]$$

$$\theta_a = \frac{2q\pi}{n - m} \quad (K < 0) \quad [18]$$

siendo $q = 0, 1, 2, \dots, (n - m - 1)$.

Regla n° 6: Intersección de las asíntotas (centroide)

Las asíntotas cortan al eje real en un punto situado a una distancia σ_o del origen dada por:

$$\sigma_o = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \quad [19]$$

Regla n° 7: Angulos de salida de los polos y llegada a los ceros

Los ángulos de salida de los polos y de llegada a los ceros son los que forme la tangente a la correspondiente rama del lugar de las raíces, en el polo o cero considerado, con el eje real. Estos ángulos se hallan aplicando el criterio del argumento:

$$\theta_{zp} = \sum_{i=1}^m \theta_{z_i} - \sum_{i=1}^n \theta_{p_i} - (2q + 1)\pi \quad \{K > 0\} \quad [20]$$

$$\theta_{zp} = \sum_{i=1}^m \theta_{z_i} - \sum_{i=1}^n \theta_{p_i} - 2q\pi \quad \{K < 0\} \quad [21]$$

Regla n° 8: Puntos de dispersión o de confluencia de ramas

Los puntos de dispersión o de confluencia de ramas son aquéllos que corresponden a una raíz múltiple de la ecuación característica, teniendo además la particularidad de poseer valores máximos o mínimos de la ganancia K.

Puesta la ecuación característica de la forma:

$$K = f(s) \quad [22]$$

son las raíces de la ecuación:

$$\frac{dK}{ds} = 0 \quad [23]$$

Esta condición es necesaria pero no suficiente, es decir que todos los puntos de dispersión o confluencia han de satisfacer esta condición, pero no todas las soluciones de [23] corresponderán a esta clase de puntos. Para que esta circunstancia se dé, es además necesario que dichas soluciones satisfagan también la ecuación característica.

Regla nº 9: Intersección con el eje imaginario

La intersección del lugar de las raíces y del lugar inverso con el eje imaginario y los correspondientes valores de la ganancia K se pueden determinar aplicando el criterio de Routh.

Efectivamente, los puntos de corte del lugar de las raíces con el eje imaginario corresponden a polos que hacen el sistema marginalmente estable, lo que repercute en la aparición de una fila de ceros en la matriz de Routh.

Regla nº 10: Determinación de la ganancia K

El valor de la ganancia K para un punto cualquiera s_1 del lugar de las raíces o del lugar inverso puede calcularse aplicando el criterio del módulo, cuya expresión es:

$$|K| = \frac{\prod_{i=1}^n |s_1 + p_i|}{\prod_{i=1}^m |s_1 + z_i|} \quad [24]$$

Esta ecuación puede resolverse numéricamente o en forma gráfica, si el lugar de las raíces está ya trazado.

Regla n° 11: Suma de las raíces

Si la ecuación característica se pone de forma que el coeficiente del término s^n de mayor exponente sea la unidad, el coeficiente del término s^{n-1} es igual a la suma de las raíces cambiada de signo, para cualquier valor de K . Esta propiedad puede servir para determinar una raíz cuando se conoce la suma de las restantes.

Un resumen de las reglas para la construcción del lugar de las raíces se muestra en la [Figura 3](#).

DINAMICA DE SISTEMAS, SIMULACION Y CONTROL

Capítulo 8

1) Número de ramas	El número de ramas independientes del lugar de las raíces es igual al número de polos de la función de transferencia en bucle abierto $G(s)H(s)$
2) Puntos de comienzo ($K=0$) y final ($K=\infty$)	Cada rama del lugar de las raíces comienza en un polo de la función $G(s)H(s)$ y termina en un cero de la misma; si el número de ceros es inferior al de polos existirá un número de ceros en el infinito igual a la diferencia entre ambos $n-m$.
3) Comportamiento en el eje real	Un punto situado sobre el eje real pertenecerá al lugar de las raíces, si el número de polos y ceros situados a su derecha es impar. Si $K < 0$ el número deberá ser par.
4) Simetría	El lugar de las raíces ($K > 0$) y el lugar inverso de las raíces ($K < 0$) son simétricos respecto al eje real.
5) Asíntotas	Las ramas del lugar de las raíces que terminan en el infinito son asintóticas, para grandes valores de s, a rectas cuyos ángulos con el eje real vienen dados por $\theta_s = \frac{(2q + 1)\pi}{n - m} \quad (K > 0)$ $\theta_s = \frac{2q\pi}{n - m} \quad (K < 0)$ siendo $q = 0; 1; 2; \dots n - m - 1$
6) Intersección de las asíntotas	Las asíntotas cortan al eje real en un punto situado a una distancia σ_o del origen dada por $\sigma_o = \frac{\sum \text{polos de } G(s)H(s) - \sum \text{ceros de } G(s)H(s)}{n - m}$

DINAMICA DE SISTEMAS, SIMULACION Y CONTROL

Capítulo 8

7) Angulos de salida de los polos y de llegada a los ceros

Los ángulos de salida de los polos y de llegada a los ceros se hallan aplicando el criterio del argumento:

$$\theta_{sp} = \sum \theta_z - \sum \theta_p - (2q + 1) \pi \quad K > 0$$

$$\theta_{ez} = \sum \theta_z - \sum \theta_p - 2q \pi \quad K < 0$$

8) Puntos de dispersión y de confluencia de ramas

Puesta la ecuación característica en la forma

$$K = f(s)$$

son las raíces de la ecuación

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

9) Intersección con el eje imaginario

Los puntos de intersección del lugar de las raíces con el eje imaginario se pueden hallar aplicando el criterio de Routh para sistemas marginalmente estables.

10) Determinación de la ganancia K

El valor de K se puede determinar aplicando el criterio del módulo:

$$|K| = \frac{\prod_{i=1}^n |s_1 + p_i|}{\prod_{i=1}^m |s_1 + z_i|}$$

11) Suma de las raíces

La suma de las raíces es constante e igual al coeficiente del término en s^{n-1} cambiando de signo, cuando el coefi-

ciente de s^n es la unidad.

Figura 3 Reglas para la construcción del lugar de las raíces

8.4 ADICION DE POLOS Y CEROS

Una vez estudiada la construcción del lugar de las raíces, es evidente que la respuesta de un sistema de control a un escalón puede ser encontrada mediante la aplicación de este método enteramente gráfico. Asimismo se puede estudiar sobre el diagrama el efecto que producen los distintos modos de control estudiados sobre la respuesta de un proceso típico.

Supóngase, pues, el proceso más sencillo, la respuesta a escalón de un sistema de primer orden con control proporcional, cuya función de transferencia en lazo abierto sería:

$$G(s) = H(s) = \frac{K}{s(s + a)} \quad [Y]$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones correspondientes a los modos de control, estudiadas en el **Capítulo 6**, se puede afirmar que, respecto al proceso original considerado:

- * El control integral añade a la función de transferencia en lazo abierto un polo y un cero.
- * El control diferencial añade a la función de transferencia en lazo abierto un cero.

con lo cual el estudio de la influencia de los modos de control en la estabilidad del sistema se limita al análisis de la función de transferencia en lazo abierto cuando ésta contiene polos o ceros adicionales.

8.4.1 ADICION DE POLOS

En general, se puede demostrar que la adición de un polo a la función $G(s)H(s)$ a la izquierda del plano s tiene el efecto de "empujar" el lugar de las raíces originales hacia la derecha del plano.

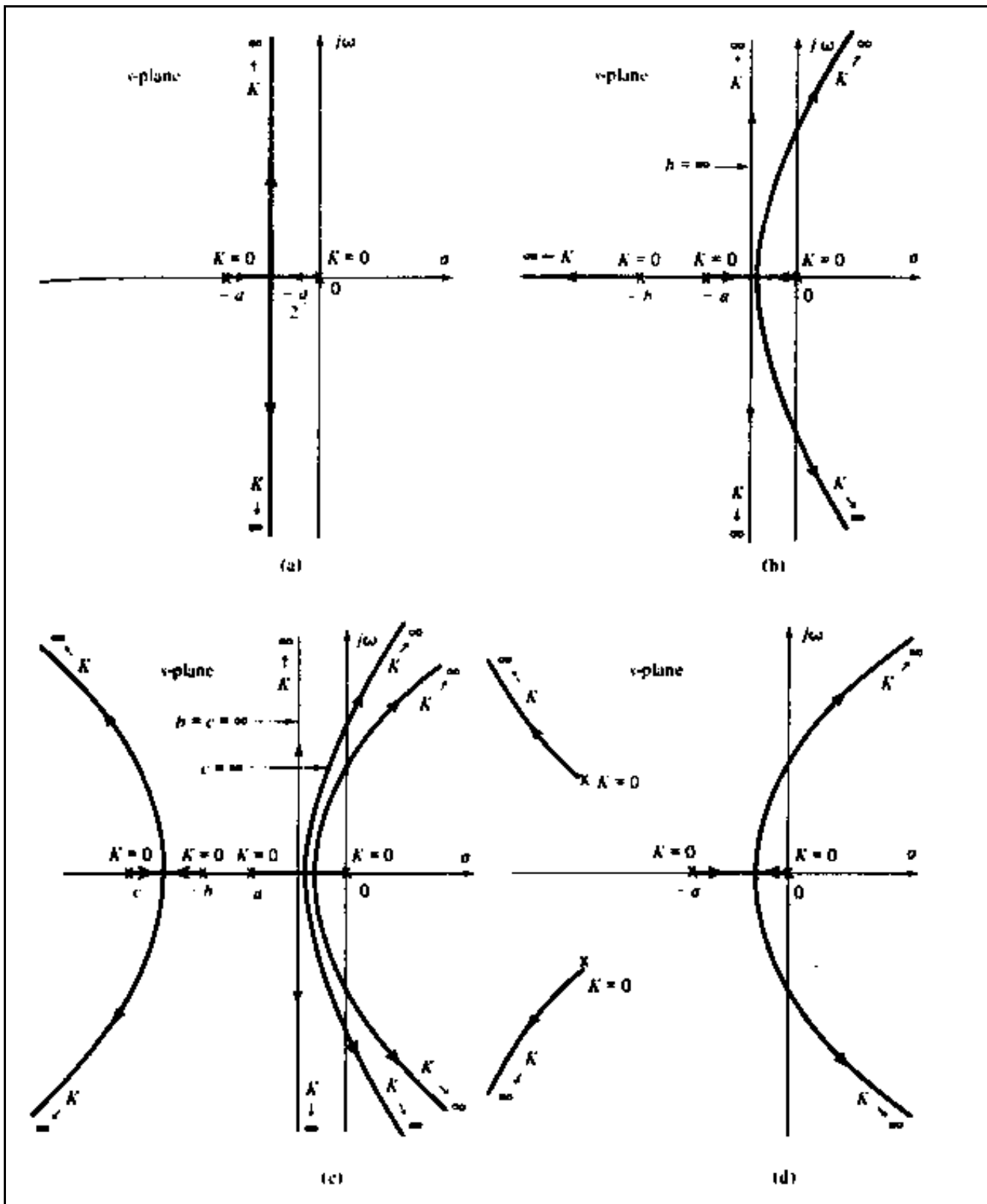


Figura 4 Lugar de las raíces: Efecto de la adición de ceros

DINAMICA DE SISTEMAS, SIMULACION Y CONTROL

Capítulo 8

En efecto, considérese la función de transferencia original, representada por la ecuación [Y]. El lugar de las raíces de la ecuación característica $1 + G(s)H(s)$ es del tipo representado en la Figura 4.a, con los polos en $s = 0$ y $s = -a$.

Si ahora se añade un polo en $s = -b$, tal que:

$$G(s) H(s) = \frac{K}{s (s + a) (s + b)} \quad (b > a) \quad [z]$$

se puede ver en la [Figura 4.b](#) que el polo adicional hace que la parte compleja del lugar de las raíces se curve hacia la derecha del plano s . Los ángulos de las asíntotas pasan de $\pm 90^\circ$ a $\pm 60^\circ$. Asimismo, el punto de dispersión es desplazado hacia la derecha. En estas condiciones, el sistema puede hacerse inestable si el valor de K excede el valor crítico, mientras que el sistema original siempre es estable.

En la [Figura 4.c](#) se muestra el lugar de las raíces al añadir otro polo en $s = -c$. El sistema ahora es de cuarto orden y los dos lugares complejos de las raíces son desplazados más aún hacia la derecha, siendo ahora sus asíntotas de $\pm 45^\circ$. La condición de estabilidad del sistema se ha visto aún más restringida.

Finalmente, la [Figura 4.d](#) ilustra la adición de un par de polos conjugados al sistema original de dos polos, lo que produce un efecto similar al ya comentado.

Se puede, pues, extraer como conclusión general, que la adición de polos a la función $G(s)H(s)$ tiene el efecto de desplazar el lugar de las raíces hacia la derecha del plano s .

8.4.2 ADICION DE CEROS

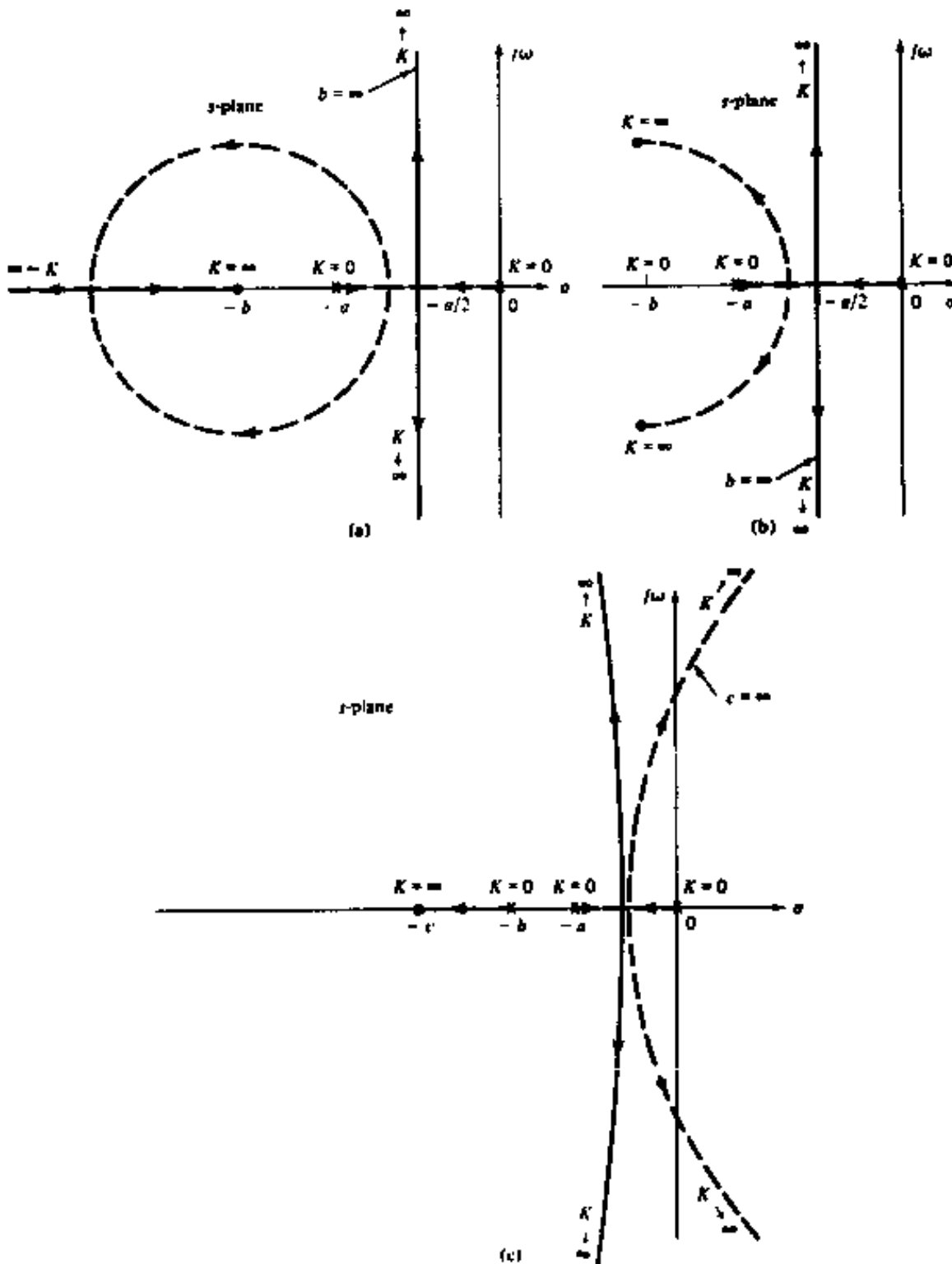


Figura 5 Lugar de las raíces: Efecto de la adición de polos

La adición de ceros a la función de transferencia en lazo abierto provoca el movimiento del lugar de las raíces hacia la mitad izquierda del plano s . Así, si se añade un cero en $s = -b$ en la función de transferencia original, es decir:

$$G(s) H(s) = \frac{K (s + b)}{s (s + a)} \quad (b > a) \quad [\text{AA}]$$

el lugar de las raíces toma la forma indicada en la [Figura 5.a](#), es decir, el lugar de las raíces resultante se ha inclinado a la izquierda y ha formado un círculo. Así pues, la estabilidad relativa del sistema ha mejorado al añadir un cero.

La [Figura 5.b](#) ilustra que se produce un efecto similar como resultado de la adición de un par de ceros conjugados complejos a la función original.

La [Figura 5.c](#) muestra el lugar de las raíces cuando se añade un cero en $s = -c$ a la función de transferencia [\[Z\]](#), es decir para:

$$G(s) H(s) = \frac{K (s + c)}{s (s + a) (s + b)} \quad [\text{BB}]$$

8.5 SISTEMAS CON TIEMPO MUERTO

Si el sistema contiene un término de tiempo muerto, la función de transferencia en lazo abierto se podrá escribir de la forma:

$$1 + K G(s) H(s) e^{-Ts} = 0 \quad [\text{CC}]$$

teniéndose que cumplir ahora las condiciones para el lugar de las raíces:

$$e^{-T\sigma} |G(s) H(s)| = \frac{1}{|K|} \quad (-\infty < K < \infty) \quad [\text{DD}]$$

$$\arg[G(s) H(s)] = (2q + 1)\pi + \omega T \quad (K \geq 0) \quad [\text{EE}]$$

$$\arg[G(s) H(s)] = 2q\pi + \omega T \quad (K \leq 0) \quad [\text{FF}]$$

Expresiones análogas a las [\[7\]](#), [\[9\]](#) y [\[10\]](#) en las que aparece un nuevo número complejo, debido al tiempo muerto:

$$s = \sigma + j\omega \quad [\text{GG}]$$

DINAMICA DE SISTEMAS, SIMULACION Y CONTROL

Capítulo 8

cuyas partes real e imaginaria están incluidas en las condiciones de existencia del lugar de las raíces.

Para construir el lugar de las raíces habrá que tener en cuenta que algunas reglas son diferentes, a saber:

- * $K = 0$ no sólo para los polos, sino también para $\sigma = -\infty$.
- * $K = \infty$ no sólo para los ceros, sino también para $\sigma = +\infty$.
- * El número de ramas es infinito.
- * El número de asíntotas es infinito y paralelas al eje real del plano s , cortando al eje imaginario en:

$$w = \frac{N \pi}{T} \quad [\text{HH}]$$

- * La intersección del lugar de las raíces con el eje imaginario no se puede hallar mediante el criterio de Routh.
- * El valor de la ganancia se determina mediante la ecuación:

$$|K| = \frac{e^{T\sigma}}{|G(s) H(s)|} \quad [\text{II}]$$

Así pues, en el caso más simple de una función de transferencia de primer orden en lazo abierto de la forma:

$$G(s) H(s) = \frac{K}{s} \quad [\text{JJ}]$$

la ecuación característica, teniendo en cuenta el tiempo muerto, sería:

$$1 + \frac{K}{s} e^{-Ts} = 0$$

[KK]

que daría un diagrama del lugar de las raíces como el mostrado en la [Figura 6](#).

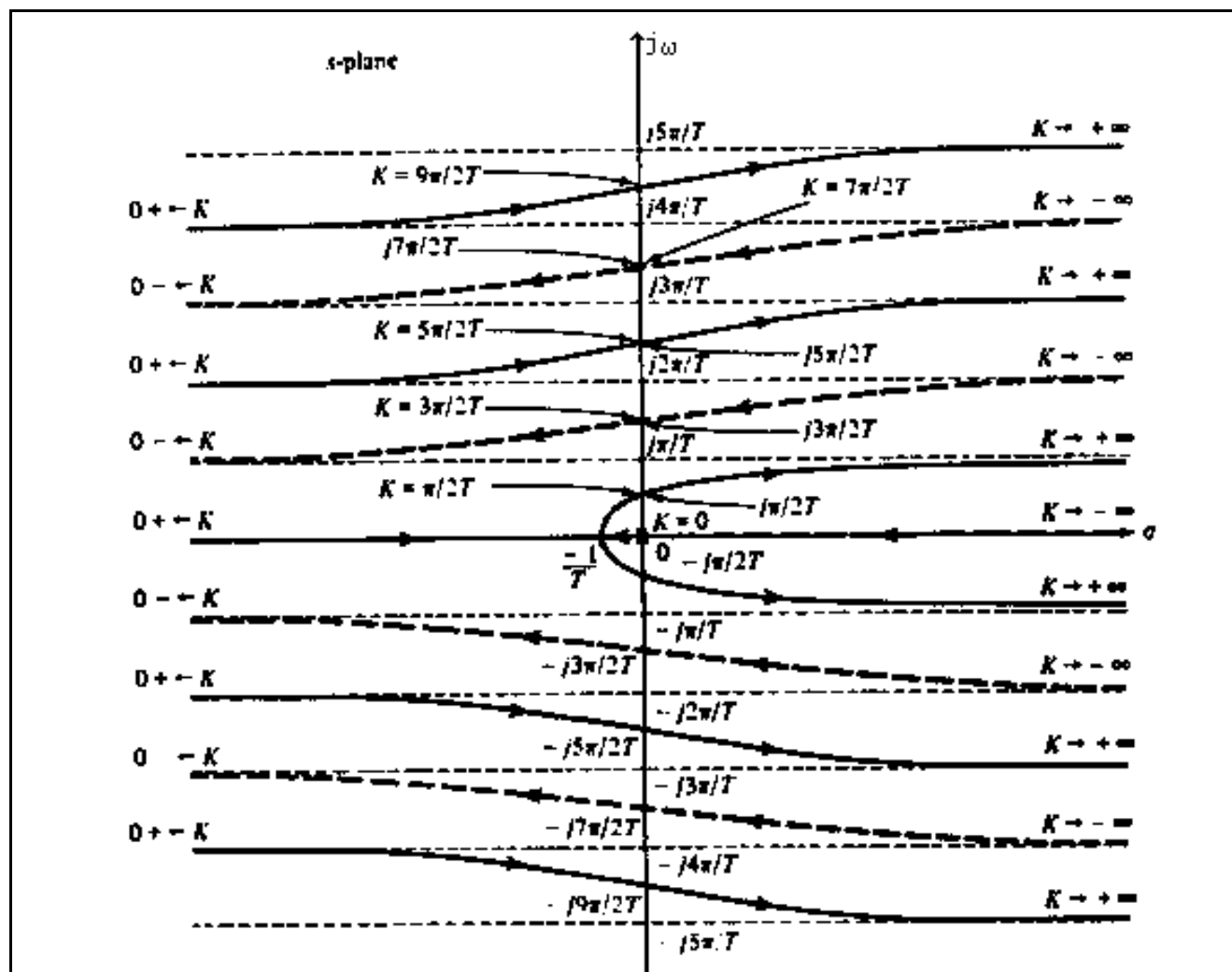


Figura 6 Lugar de las raíces para $1 + (K/s) e^{-Ts} = 0$

Aunque el lugar de las raíces tiene infinito número de ramas, bajo el punto de vista del análisis del sistema sólo las ramas situadas entre $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$ son de interés y se denominan "**ramas primarias**". Una razón para ello es que el valor crítico de K en el eje imaginario es $K = \pi/2T$, el menor de todos los posibles, por lo que es el valor crítico de estabilidad. Por ello, la respuesta transitoria del sistema está controlada por las ramas primarias.

8.6 CONTORNO DE LAS RAICES

El método del lugar de las raíces estudiado hasta ahora está restringido a un solo parámetro variable, K. Sin embargo, en muchos problemas de control es necesario estudiar los efectos de la variación de varios parámetros. Ello puede realizarse generalizando el método del lugar de las raíces, de forma que las reglas de construcción dadas para el mismo puedan igualmente ser utilizadas para determinar el lugar de las raíces cuando varíen los parámetros diferentes de K. En tal sentido se denomina "**contorno de las raíces**" al lugar geométrico de los polos en lazo cerrado de un sistema de control cuando, permaneciendo constante la ganancia, se hace variar la posición de los polos y ceros de su función de transferencia en lazo abierto.

El principio del contorno de las raíces puede ser ilustrado considerando la ecuación:

$$1 + K \frac{Z(s)}{P(s)} = 0 \quad [\text{LL}]$$

Si se desea obtener el lugar de las raíces cuando un determinado parámetro T_i , contenido en la relación $Z(s)/P(s)$, varía entre $\pm\infty$, permaneciendo K constante, será necesario transformar [LL] de tal manera que, manteniendo la misma forma, aparezca como factor el parámetro T_i , en lugar de K.

Ordenando los polinomios de modo que queden agrupados todos los términos que contengan al parámetro T_i , podrá ponerse la ecuación [LL] de la forma:

$$P(s) + K Z(s) = P_1(s) + T_i Z_1(s) = 0 \quad [\text{MM}]$$

Dividiendo por $P_1(s)$ se tendrá:

$$1 + T_i \frac{Z_1(s)}{P_1(s)} = 0 \quad [\text{NN}]$$

siendo:

$$G_1(s) H_1(s) = T_i \frac{Z_1(s)}{P_1(s)} \quad [00]$$

En consecuencia, aplicando las reglas convencionales para el trazado del lugar de las raíces a la nueva función de transferencia en lazo abierto, $G_1(s) H_1(s)$, se podrá obtener de forma directa el lugar de las raíces cuando varía el parámetro T_i . Todo ello, teniendo siempre bien presente que la función $G_1(s) H_1(s)$ no posee significado físico alguno, ya que es una función matemática auxiliar, que se utiliza exclusivamente para construir el lugar de las raíces.

CAPITULO 9
ANALISIS DE ESTABILIDAD, II:
METODO DE NYQUIST

9.1 OBJETIVOS	<u>1</u>
9.2 PRINCIPIO DEL ARGUMENTO	<u>2</u>
9.3 EL CAMINO DE NYQUIST	<u>5</u>
9.4 CRITERIO DE ESTABILIDAD DE NYQUIST	<u>9</u>
9.5 INTRODUCCION DE POLOS Y CEROS ADICIONALES	<u>11</u>
9.5.1 ADICION DE POLOS REALES	<u>12</u>
9.5.2 ADICION DE POLOS EN EL ORIGEN	<u>13</u>
9.5.3 ADICION DE CEROS REALES	<u>15</u>
9.6 ESTABILIDAD RELATIVA	<u>16</u>
9.7 ESTABILIDAD EN LOS DIAGRAMAS DE BODE Y NICHOLS	<u>19</u>
9.8 RESPUESTA FRECUENCIAL EN LAZO CERRADO: ABACO DE NICHOLS	<u>21</u>

9.1 OBJETIVOS

Tal como se ha indicado anteriormente, la condición necesaria para que un sistema sea estable es que ninguna de las raíces de su ecuación característica se halle situada en el semiplano complejo de parte real positiva. En principio, la comprobación de tal circunstancia exigiría resolver la mencionada ecuación y constatar que todas las raíces tienen parte real negativa.

Para evitar esta complejidad se desarrolló el criterio de Routh, de carácter eminentemente numérico, y que permite detectar la existencia de raíces de la ecuación característica en la zona de inestabilidad, basándose en una matriz confeccionada a partir de los coeficientes de dicha ecuación. Aunque realmente útil, el criterio de Routh no facilita información sobre la estabilidad relativa del sistema, o sobre posibles soluciones a adoptar para mejorar el grado de estabilidad.

Bastante más completo es el método del lugar de las raíces que, tal como se ha mostrado en el **Capítulo 8**, ofrece la posibilidad de obtener la posición, sobre el plano complejo, de las raíces de la ecuación característica para valores concretos de un determinado parámetro, normalmente la ganancia del sistema. Ello permite juzgar sobre la estabilidad, tanto absoluta como relativa, del sistema.

Existe también otro criterio de estabilidad, desarrollado por Nyquist, que facilita información sobre la estabilidad de un sistema sin necesidad de hallar las raíces de su ecuación característica. El criterio de Nyquist, cuyo estudio se aborda a continuación, determina mediante un método gráfico la estabilidad de un sistema en lazo cerrado, partiendo de la función de transferencia senoidal en lazo abierto del mismo. De hecho, el mencionado criterio se limita a investigar si existen raíces de la ecuación característica en el semiplano complejo de parte real positiva, relacionando el número de éstas con la respuesta frecuencial en lazo abierto del sistema.

El criterio de Nyquist presenta la ventaja de que, además de servir para determinar el grado de estabilidad de un sistema de control, facilita información sobre la manera de mejorar el comportamiento del mismo, tanto en régimen permanente como transitorio, a partir de una representación polar de la función de transferencia

senoidal en lazo abierto, dada en forma analítica u obtenida experimentalmente.

9.2 PRINCIPIO DEL ARGUMENTO

Considérese un sistema de control, cuya ecuación característica en lazo cerrado es de la forma:

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0 \quad [A]$$

Como ya se ha indicado en el **Capítulo 7**, para que el sistema en lazo cerrado sea estable, bastará que las raíces de $F(s)$ estén situadas en el semiplano complejo de parte real negativa. Sin embargo, si alguno de los polos de $G(s)H(s)$ estuviera situado en el semiplano complejo de parte real positiva, el sistema sería inestable en lazo abierto; ello no es impedimento para que el sistema sea estable en lazo cerrado, si los ceros de $G(s)H(s)$ (raíces de la ecuación [\[1\]](#)) están situados en el semiplano complejo de parte real negativa.

El desarrollo del criterio de Nyquist está basado en el llamado "**principio del argumento**" de Cauchy para funciones de variable compleja, que se presentará a continuación de forma simplificada y bajo las siguientes premisas:

- a) El comportamiento dinámico del sistema es lineal.
- b) La función de transferencia en lazo abierto ha de tener, como mínimo, tantos polos como ceros (sistema físicamente realizable), lo que implica que:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)H(s) = cte \quad [B]$$

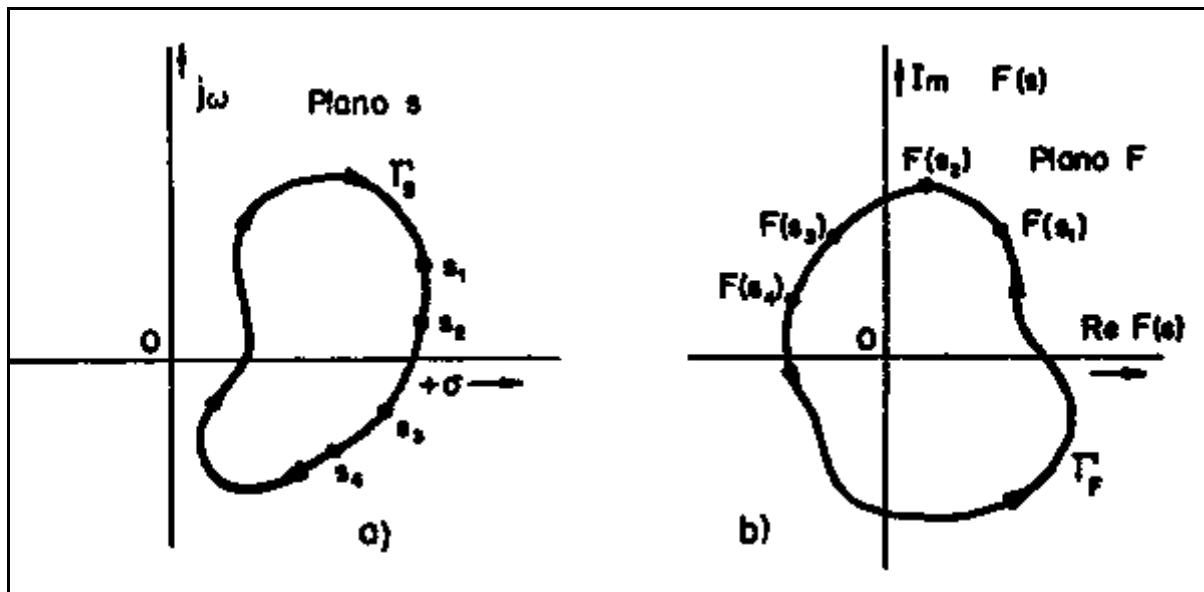


Figura 1 Correspondencia entre los planos complejos s y $F(s)$

Considérese que la función $F(s)$ es unívoca y analítica en todos los puntos de una determinada región del plano s , excepto en un número finito de puntos de dicho plano. Supóngase que se define una trayectoria cerrada Γ_s cualquiera sobre el plano s , tal como indica la [Figura 1.a](#) y que todos los puntos de Γ_s están situados en la región del plano s en que $F(s)$ es analítica.

En tales circunstancias, a cada punto de la trayectoria Γ_s del plano s le corresponderá un punto en el plano $F(s)$, resultante de tomar como coordenadas la parte real y la parte imaginaria de la expresión que se obtiene para $F(s)$ al sustituir en ella la variable compleja s por el valor particular considerado. De esta forma, a la trayectoria cerrada Γ_s del plano s le corresponderá otra trayectoria imagen Γ_F en el plano $F(s)$ que también será cerrada, tal como muestra la [Figura 1.b](#).

En estas condiciones, el principio del argumento dice que: "**si una función $F(s)$ es racional, unívoca y analítica, dentro de un contorno cerrado Γ_s , excepto para un número finito de puntos que estén situados dentro de dicho contorno, la función imagen Γ_F que resulta al recorrer la variable s el contorno cerrado Γ_s rodea al origen del plano $F(s)$ un número de veces igual a la diferencia entre el número de ceros y el número de polos de $F(s)$ situados dentro del contorno Γ_s** ",

es decir:

$$N = Z - P$$

[C]

siendo:

Z: número de ceros situados dentro del contorno s

P: número de polos situados dentro del contorno s

N: número de veces que rodea la función F(s) al origen del plano F(s), en el sentido de las agujas del reloj

Aunque el principio del argumento ha sido desarrollado considerando la trayectoria Γ_s y su imagen Γ_F , representativa de la función F(s), resulta más cómodo trabajar con la función de transferencia en lazo abierto, G(s)H(s), por ser ésta casi siempre uno de los datos del problema. En tal sentido, obsérvese que la trayectoria que describe la función:

$$G(s)H(s) = F(s) - 1$$

[D]

es la misma que describe F(s), trasladada una unidad hacia la izquierda, tal como puede verse en la [Figura 2](#).

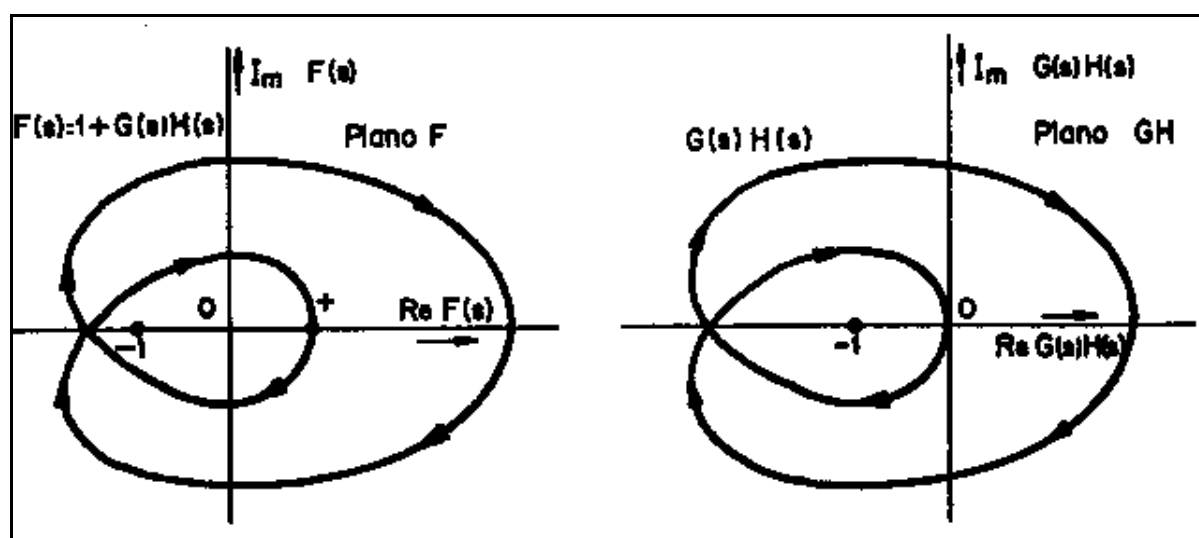


Figura 2 Relación entre las trayectorias de F(s) y G(s) H(s)

Así pues, si se representa en un plano complejo $G(s)H(s)$ la función $G(s)H(s)$, al origen del plano $F(s)$ le corresponderá el punto $-1 + 0j$. En consecuencia, al aplicar el principio del argumento, se obtendrán los mismos resultados considerando la función $F(s)$ y el origen del plano $F(s)$ o la función $G(s)H(s)$ y el punto $-1 + 0j$.

9.3 EL CAMINO DE NYQUIST

El principio del argumento puede ser utilizado para detectar la presencia de raíces de la ecuación característica $F(s) = 0$ en el semiplano complejo de parte real positiva, es decir, para estudiar la estabilidad de un sistema de control. Para ello bastará con definir el contorno Γ_s de forma que comprenda todo el mencionado semiplano, lo que se logra haciendo que Γ_s sea un semicírculo de radio infinito con base en el eje imaginario. A este contorno se le denomina "**camino de Nyquist**" y se representa en la [Figura 3.a](#).

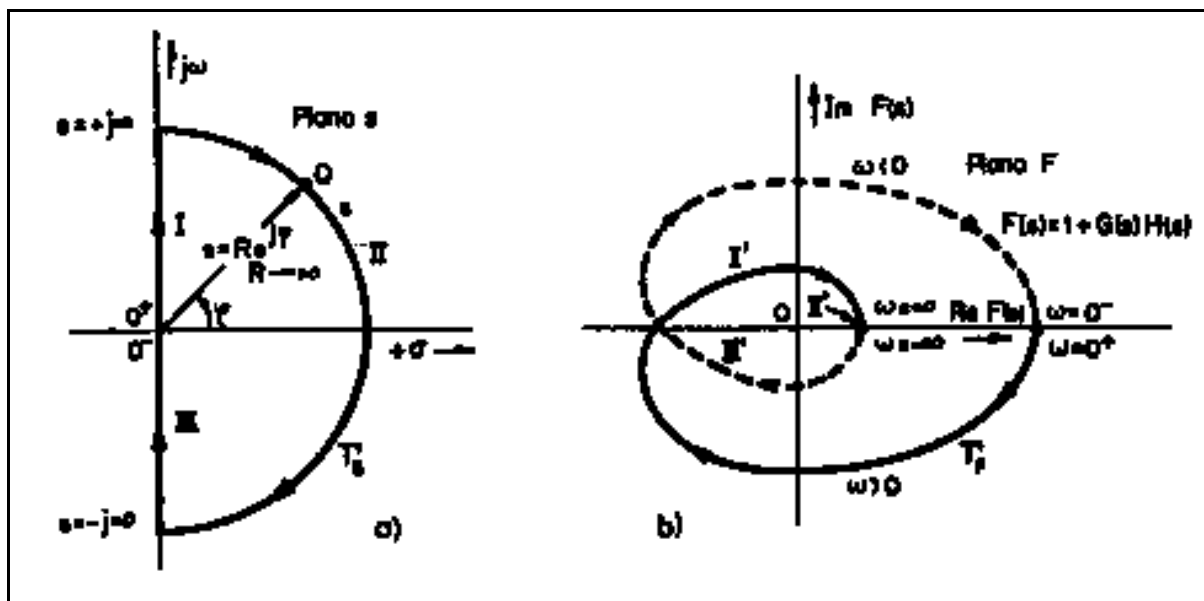


Figura 3 Camino de Nyquist simple

Como se puede observar, el camino de Nyquist es recorrido en el sentido de las agujas del reloj en una primera parte, (I), saliendo del origen del plano, $s(0^+)$, y

ascendiendo por el eje imaginario hasta alcanzar un valor infinito. Esto significa que en cualquier punto de esta trayectoria, la variable compleja s tiene el valor:

$$s = \omega j \quad (0^+ \leq \omega \leq +\infty) \quad [\text{E}]$$

Obsérvese que al introducir la variable real ω para obtener la ecuación de variación (se podría haber utilizado cualquier otra variable real), implica entrar en el dominio de la frecuencia.

La segunda parte del camino de Nyquist es un semicírculo de radio infinito, (II), de ecuación:

$$s = R e^{j\psi} \quad \begin{cases} R \rightarrow \infty \\ \pi/2 \geq \psi \geq -\pi/2 \end{cases} \quad [\text{F}]$$

que comprende todo el semiplano complejo de parte real positiva. La tercera parte, (III), vuelve a tener la ecuación:

$$s = \omega j \quad (-\infty \leq \omega \leq 0^-) \quad [\text{G}]$$

pero con diferente rango de ω , ya que el movimiento es a lo largo del eje imaginario negativo, desde el infinito hasta el origen.

Así pues, sustituyendo en $F(s)$ s por $\pm\omega j$ y dando valores a ω desde $-\infty$ a $+\infty$ se obtendrán en el plano $F(s)$ los tramos III' y I' del trazado de $F(s)$ mostrado en la [Figura 3.b](#), que corresponden a los III y I del camino de Nyquist. Obsérvese que estos tramos son simétricos respecto al eje real, pues si se sustituye en $F(s)$ la variable compleja s por ∞j , el módulo no cambiará de signo, mientras que el argumento sí lo hará. Obsérvese asimismo que los tramos I' y III' representan la respuesta frecuencial $F(\infty j)$ correspondiente a la función $F(s)$ cuando ω varía desde 0 a $+\infty$ y su curva $F(-\infty j)$ cuando ∞ varía desde $-\infty$ a 0. Bastará, pues, conocer una de ellas para poder aplicar el principio

del argumento con el camino de Nyquist considerado.

En cuanto al tramo II, si se considera la condición expresada por la ecuación [2], resulta que:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow \infty} [1 + G(s)H(s)] = cte$$

[H]

por lo que al moverse el punto Q a lo largo del semicírculo de radio infinito, el tramo correspondiente de $F(s)$ no ha de experimentar ningún giro, es decir, ha de ser un punto fijo (II').

De lo expuesto se deduce que todo el giro de $F(s)$ tiene lugar durante el desplazamiento del punto Q desde $-\infty j$ hasta $+\infty j$ sobre el eje imaginario.

El camino de Nyquist considerado hasta ahora es válido para aquellos casos en que la ecuación característica no tiene singularidades situadas sobre el eje imaginario. Para tales casos, que son muy frecuentes, el camino de Nyquist ha de modificarse, puesto que no debe pasar por ningún polo. La forma normal de hacerlo es introducir pequeños semicírculos en el camino original, de modo que sean evitadas las singularidades situadas sobre el eje imaginario, tal como se muestra en la [Figura 4](#).

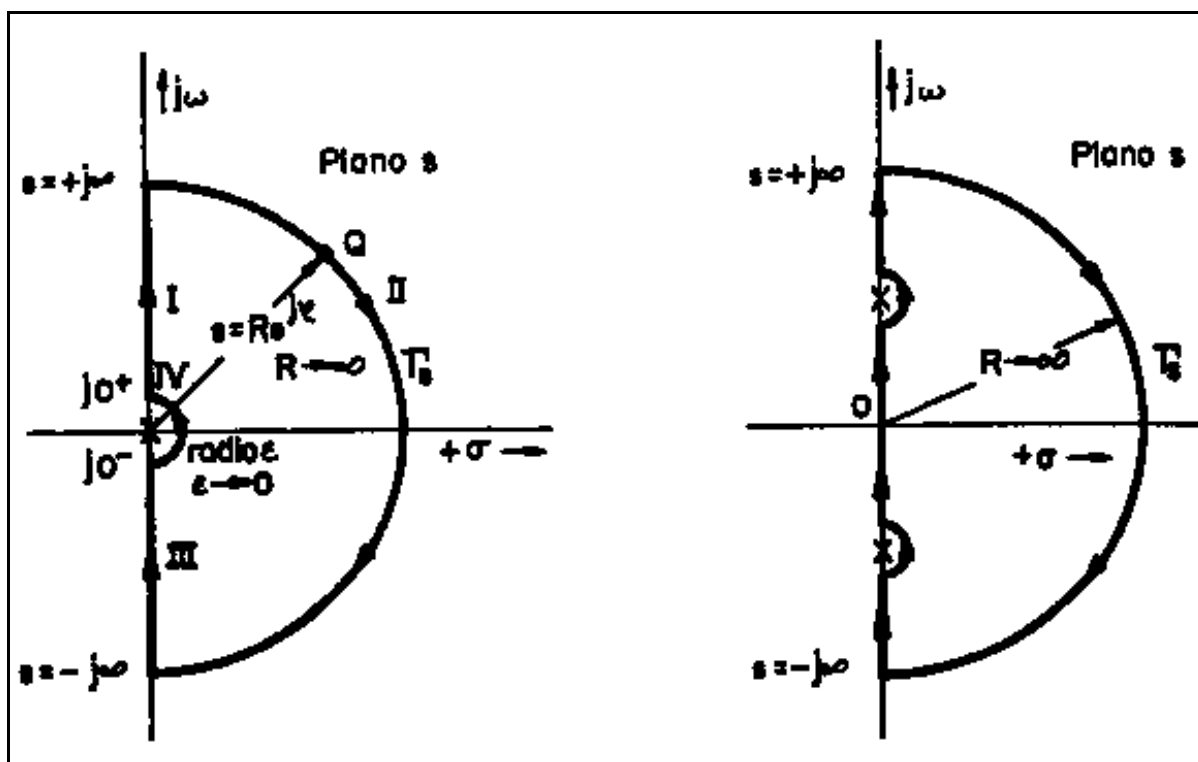


Figura 4 Camino de Nyquist generalizado

El nuevo camino de Nyquist cubre todo el semiplano complejo de parte real positiva excepto las zonas situadas dentro de los pequeños semicírculos, lo que no representa inconveniente alguno si el radio de aquéllos (ϵ) se toma suficientemente pequeño, es decir, los puntos de ese semicírculo pueden ser representados por la ecuación:

$$s = \epsilon e^{j\psi} \quad \begin{cases} \epsilon \rightarrow 0 \\ \pi/2 \geq \psi \geq -\pi/2 \end{cases} \quad [I]$$

Para un sistema con función de transferencia en lazo abierto de la forma general:

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}{s^r \prod_{v=1}^q (T_v s + 1)} \quad [J]$$

es decir, con polos en el origen, al sustituir en [10] la condición [9], se obtiene:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{e^r e^{r\psi j}} = \frac{K}{e^r} e^{-r\psi j} \quad [K]$$

Cuando $\epsilon \rightarrow 0$, el módulo tiende a infinito; respecto al argumento, al variar el de s desde $-\pi/2$ hasta $+\pi/2$, el de $G(s)H(s)$ variará $r\pi$ en el sentido de las agujas del reloj, lo que equivaldrá, normalmente, a varios giros de radio infinito en torno al origen del plano $G(s)H(s)$, tal como se muestra, a título de ejemplo, en la [Figura 5](#).

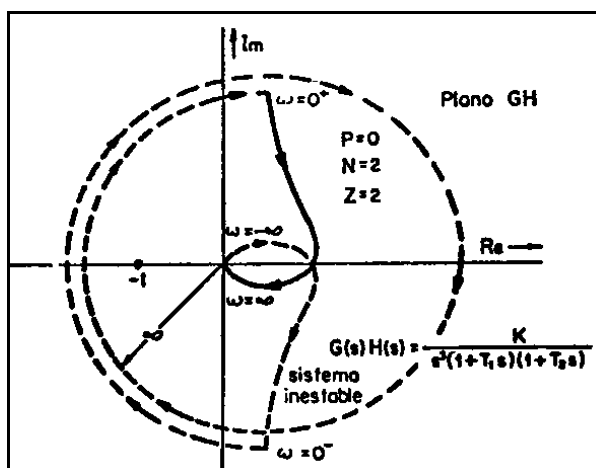


Figura 5 Representación de $G(s)H(s)$ con polos en el origen

9.4 CRITERIO DE ESTABILIDAD DE NYQUIST

El criterio de estabilidad de Nyquist es la aplicación del principio del argumento cuando se toma el camino de Nyquist como trayectoria de variación de s en el plano complejo. En efecto, si se traza en el plano $F(s)$ la curva que describe la función $F(s)$ cuando la variable s recorre el camino de Nyquist y se sitúan en el plano s los polos y ceros de la función $F(s)$, se conocerá el valor N del número de veces que ésta rodea al origen del mencionado plano.

Conocido N y dado que el número de polos P de $F(s)$ situados en el semiplano

s de parte real positiva también es conocido, por ser éste igual al número de polos de la función de transferencia en lazo abierto, $G(s)H(s)$ (dato del problema), se podrá determinar el valor de Z mediante la ecuación [3], es decir, el número de polos de la función de transferencia en lazo cerrado situados en el semiplano complejo de parte real positiva, ya que aquella tiene como expresión:

$$M(s) = \frac{G'(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad [L]$$

Lógicamente, para que el sistema sea estable, deberá cumplirse la condición:

$$Z = 0 \quad [M]$$

Obsérvese que con este procedimiento gráfico se puede determinar el número de polos inestables de un sistema en lazo cerrado, sin necesidad de factorizar la ecuación característica $F(s) = 0$.

El método puede simplificarse aún más actuando directamente en el plano $G(s)H(s)$, en cuyo caso el valor de N puede obtenerse observando el número de veces que la curva de variación de $G(s)H(s)$ rodea al punto $-1 + 0j$. Aplicando la expresión [3] se puede igualmente determinar el valor de Z .

En consecuencia, dado un sistema en lazo cerrado de ecuación característica expresada por [1], podrá determinarse su estabilidad aplicando el principio del argumento de la siguiente forma:

- 1) Se sitúan en el plano s los polos de $G(s)H(s)$ y se define el camino de Nyquist.
- 2) Se traza la curva de variación de $G(s)H(s)$, cuando s recorre el camino de Nyquist en el plano complejo.
- 3) Se observa si la curva obtenida rodea totalmente el punto $-1 + 0j$; en caso afirmativo, se determina el número total de rodeos completos, así como el

sentido en que éstos se realizan.

4) Se aplica la expresión [3].

En general, las funciones de transferencia en lazo abierto de la mayor parte de los sistemas de control que se utilizan en la práctica no tienen polos situados en el semiplano complejo de parte real positiva (sistemas estables en lazo abierto), por lo que $P = 0$ y, por tanto, $N = Z$. En consecuencia, para que el sistema en lazo cerrado sea estable, el lugar de $G(s)H(s)$, también llamado "**lugar de Nyquist**", no debe rodear al punto $-1 + 0j$. En este caso basta trazar la parte $G(j\omega)H(j\omega)$ correspondiente al tramo I del camino de Nyquist y observar su posición con respecto al punto $-1 + 0j$. Si recorriendo esta trayectoria desde $\omega = 0^+$ hasta $\omega = \infty$, el punto $-1 + 0j$ queda a la izquierda de la curva $G(j\omega)H(j\omega)$, el sistema será estable; si queda a la derecha, será inestable, como se muestra en el ejemplo de la **Figura 6**. Si se desea conocer el número de polos inestables de $M(s)$ (ecuación [12]), se deberá trazar la curva completa para conocer el número de rodeos, N , al punto crítico.

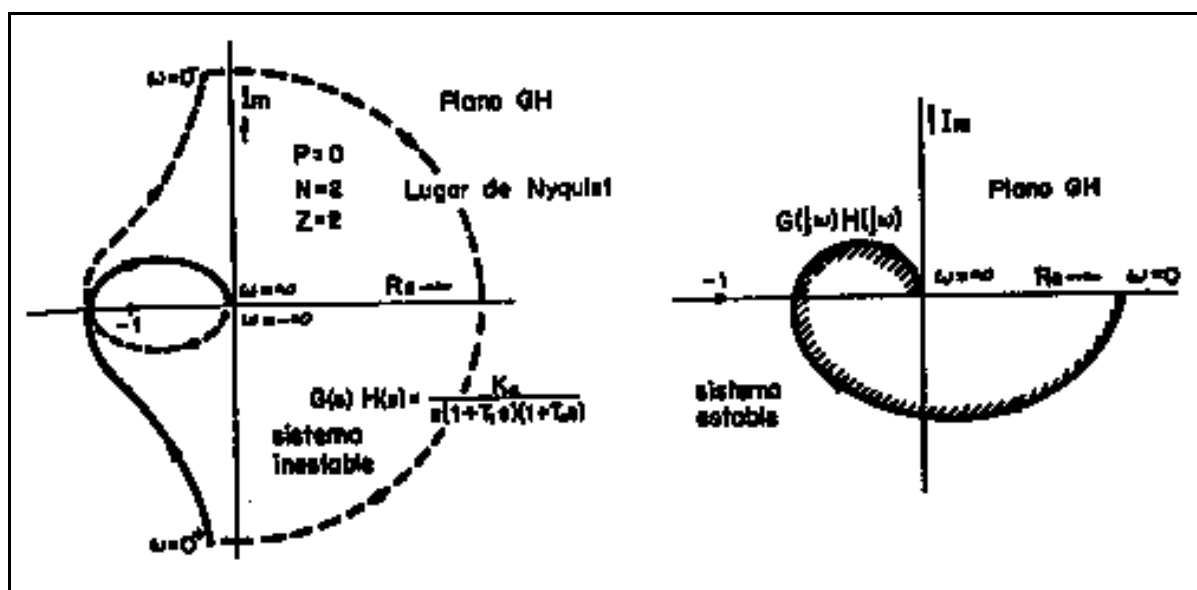


Figura 6 Sistemas estables e inestables

9.5 INTRODUCCION DE POLOS Y CEROS ADICIONALES

Para estudiar los efectos que produce la introducción de polos y ceros adicionales en la función de transferencia en lazo abierto de un sistema, se partirá de una función sencilla de primer orden, es decir:

$$G'(s)H'(s) = \frac{K}{T_1s + 1}$$

[N]

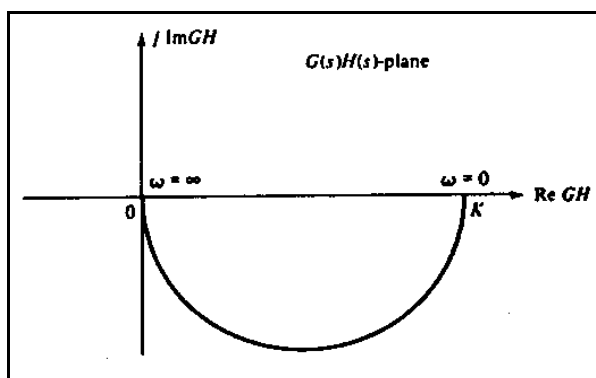


Figura 7 Lugar de Nyquist para un sistema de primer orden

cuyo lugar de Nyquist para $0^+ \leq \omega \leq +\infty$ es el representado en la [Figura 7](#).

9.5.1 ADICION DE POLOS REALES

Si a la función de transferencia $G'(s)H'(s)$ de [\[14\]](#) se le añaden n polos reales, se tendrá como nueva función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1) \dots (T_{n+1}s + 1)} \quad [O]$$

A frecuencias $\omega \rightarrow 0$, los valores correspondientes de [\[14\]](#) y [\[15\]](#) son iguales, ya que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G'(s)H'(s) = K \quad [P]$$

Sin embargo, para frecuencias $\omega \rightarrow \infty$, los valores resultan diferentes, ya que, operando en el dominio de la frecuencia:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{\prod_{i=1}^{n+1} \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1}} = 0 \quad [Q]$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \psi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n+1} \arctan(-\omega T_i) = -(n+1) \frac{\pi}{2} \quad [R]$$

En consecuencia, la introducción de n polos reales hará que el lugar de Nyquist de $G(s)H(s)$ para $0^+ \leq \omega \leq +\infty$ gire, en el sentido de las agujas del reloj, $(n+1)$ cuadrantes, o sea, tantos como constantes de tiempo hay en el denominador de $G(s)H(s)$, como se muestra en el ejemplo de la [Figura 8](#).

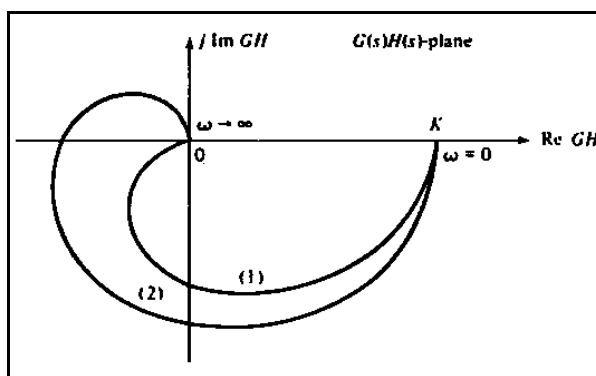


Figura 8 Lugares de Nyquist para sistemas de segundo y tercer orden

Como se puede observar, la introducción de polos adicionales en la función de transferencia en lazo abierto produce el conocido efecto de hacer el sistema en lazo cerrado más inestable.

9.5.2 ADICION DE POLOS EN EL ORIGEN

La adición de n polos en el origen a la función de transferencia $G'(s)H'(s)$ dada en [\[14\]](#), hará que ésta tome la forma:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^n (T_i s + 1)} \quad [S]$$

Para $\omega \rightarrow 0$ se tendrá, en el dominio de la frecuencia:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K}{\omega^n \sqrt{(\omega^2 T_1^2 + 1)}} \quad [T]$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \psi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} [\arctan(-\omega T_1) - n \frac{\pi}{2}] = -n \frac{\pi}{2} \quad [U]$$

Es decir, el lugar comenzará en el infinito, girado n cuadrantes en el sentido de las agujas del reloj.

Para $\omega \rightarrow \infty$ se tendrá:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{\omega^n \sqrt{(\omega^2 T_1^2 + 1)}} \quad [V]$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \psi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\arctan(-\omega T_1) - n \frac{\pi}{2}] = - (n + 1) \frac{\pi}{2} \quad [W]$$

Es decir, llegará al origen del plano $G(s)H(s)$ pasando por tantos cuadrantes como constantes de tiempo hay en el denominador, lo que se puede comprobar en el ejemplo mostrado en la [Figura 9](#).

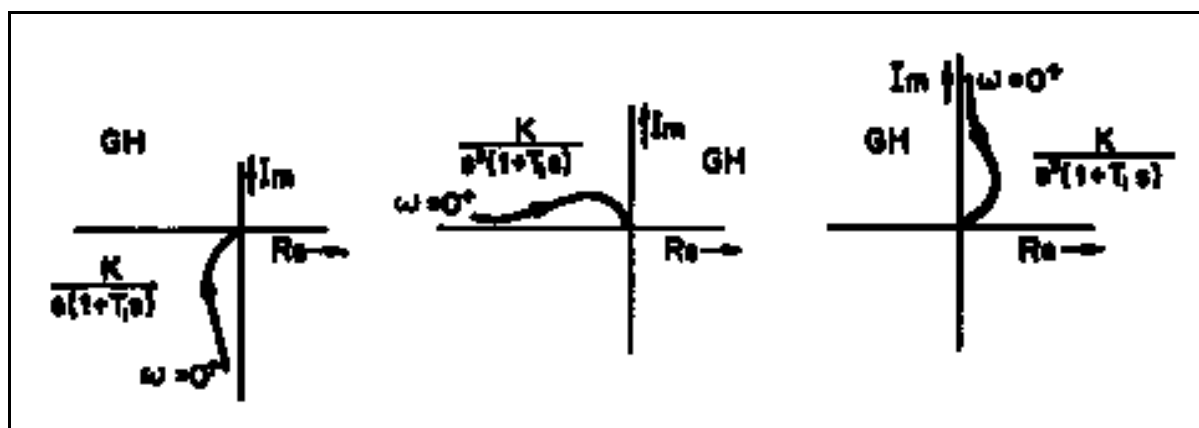


Figura 9 Lugares de Nyquist al añadir polos en el origen

La introducción de polos adicionales situados sobre el origen, en la función de transferencia en lazo abierto, produce pues, el efecto de hacer más inestable el sistema en lazo cerrado.

9.5.3 ADICION DE CEROS REALES

Considérese un sistema con una función de transferencia expresada por:

$$G'(s)H'(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad [x]$$

Si se introduce un cero adicional, se tendrá como nueva función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_as + 1)}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad [y]$$

A frecuencias $\omega \rightarrow \infty$, los valores de las expresiones [24] y [25] coinciden:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G'(s)H'(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \frac{K}{s} = \infty \quad [z]$$

mientras que a frecuencias $\omega \rightarrow \infty$ se obtiene el mismo módulo (cero) pero el argumento pasa de $-3\pi/2$ a $-\pi$, al ser la expresión del mismo:

$$\Psi(\omega) = \arctan(\omega T_a) - \frac{\pi}{2} - \arctan(-\omega T_1) + \arctan(-\omega T_2) \quad [aa]$$

Esto significa que la introducción de un cero adicional produce el efecto de un giro del lugar de Nyquist de $\pi/2$ en el sentido contrario al de las agujas del reloj, lo que hace al sistema en lazo cerrado más estable (Figura 10), por quedar situado el lugar de $G(s)H(s)$ a la derecha del lugar de $G'(s)H'(s)$. Añadiendo

ceros a su función de transferencia en lazo abierto se podrá, pues, convertir un sistema inicialmente inestable en otro estable.

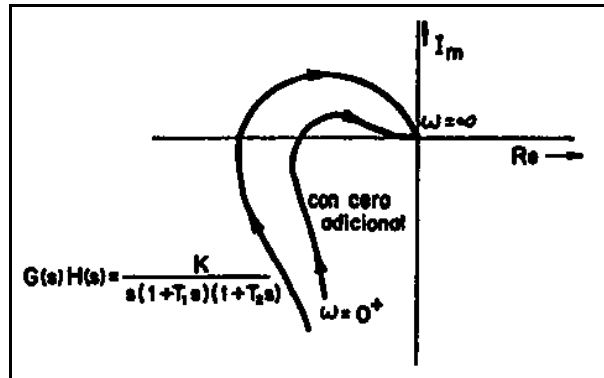


Figura 10 Lugares de Nyquist al añadir un cero

9.6 ESTABILIDAD RELATIVA

El criterio de Nyquist permite determinar, con cierta facilidad, la estabilidad absoluta de un sistema de control ya que, cuanto más próximo se encuentre el lugar de Nyquist de la función de transferencia en lazo abierto, $G(s)H(s)$, al punto $-1 + 0j$, tanto menor será su estabilidad. El concepto gráfico de estabilidad relativa se expresa analíticamente mediante dos índices, denominados "**margen de ganancia**" y "**margen de fase**".

Una forma convencional de expresar la proximidad del lugar de Nyquist al punto $-1 + 0j$ es mediante la distancia de dos puntos característicos, designados por A y B en la Figura 11, a dicho punto.

A la frecuencia ω_ψ , para la cual el ángulo de fase ψ de $G(\omega j)H(\omega j)$ es igual a $-\pi$, se la denomina "**frecuencia de cruce de fase**". A la frecuencia ω_g , para la cual la

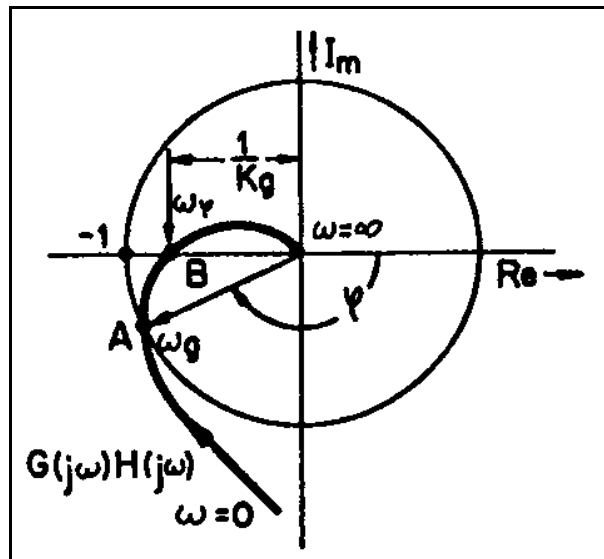


Figura 11 Criterios de estabilidad relativa

amplitud de $G(\omega j)H(\omega j)$ es igual a la unidad, se la llama **"frecuencia de cruce de ganancia"**.

El margen de ganancia, K_g , se define como la relación entre las distancias, tomadas sobre el eje real, desde el origen al punto $-1 + 0j$ y al lugar $G(\omega j)H(\omega j)$ para $\omega = \omega_\psi$, es decir:

$$K_g = \frac{1}{|G(\omega_\psi j) H(\omega_\psi j)|} \quad [\text{BB}]$$

o, expresado en decibelios:

$$K_g \text{ [db]} = -20 \log |G(\omega_\psi j) H(\omega_\psi j)| \quad [\text{CC}]$$

Si $K_g < 1$, el sistema será inestable, si $K_g = 1$ será marginalmente estable y si $K_g > 1$, será estable. Expresado en decibelios, un margen de ganancia positivo indica que el sistema es estable, igual a cero que es marginalmente estable y negativo que es inestable (criterio de estabilidad de Bode).

Obsérvese que, para un sistema estable, el margen de ganancia en decibelios expresa la cantidad que puede ser aumentada la ganancia para que el sistema quede al borde de la inestabilidad. En el caso de un sistema inestable, el margen de ganancia expresa la cantidad que hay que disminuir la ganancia para que el sistema se convierta en estable.

El margen de ganancia es simplemente una de las posibles formas de representar la estabilidad relativa de un sistema de control. En principio, un sistema con un gran margen de ganancia debería ser relativamente más estable que otro que posea un margen de ganancia inferior. Sin embargo, esto no es siempre así, ya que existen otros parámetros del sistema aparte de su ganancia en lazo cerrado que pueden variar y, por tanto, contradecir el razonamiento anterior.

Con objeto de reforzar la representación de la estabilidad relativa de un sistema

de control se define el margen de fase como un complemento al margen de ganancia. El margen de fase, ϕ , es el ángulo de fase (expresado en grados) de $G(\omega j)H(\omega j)$ a la frecuencia de cruce de ganancia, $\omega = \omega_g$, que debe ser girada $G(\omega j)H(\omega j)$ en torno al origen para que el sistema pase por el punto $-1 + 0j$, es decir, analíticamente:

$$\phi = \psi(\omega_g) + 180^\circ$$

[DD]

contándose ϕ desde $-1 + 0j$ en el sentido contrario de las agujas del reloj. Así, como se puede observar en la [Figura 12](#), valores de $\phi > 0$ corresponden a sistemas estables y valores de $\phi < 0$ a sistemas inestables.

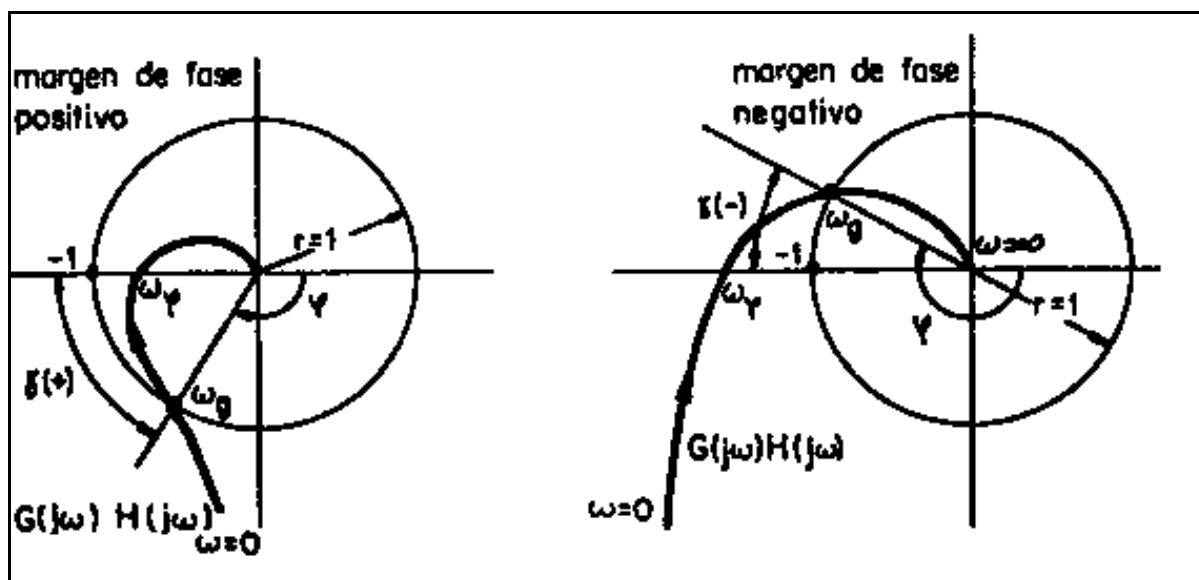


Figura 12 Definición del margen de fase

En contraposición con el margen de ganancia, que da una medida del efecto de la ganancia del lazo de control sobre la estabilidad del sistema en lazo cerrado, el margen de fase indica el efecto sobre la estabilidad debido a cambios en otros parámetros del sistema, que teóricamente sólo alteran el ángulo de fase de $G(\omega j)H(\omega j)$.

Así pues, para poder juzgar sobre la estabilidad relativa de un sistema, es necesario conocer tanto el margen de ganancia como el margen de fase; no es suficiente con uno solo de ellos. Por ejemplo, para un sistema de segundo orden, el margen de ganancia carece de sentido, puesto que el lugar de Nyquist no corta nunca

al eje real negativo.

Para que un sistema sea estable, habrán de ser positivos su margen de ganancia y su margen de fase. Una regla práctica, bastante útil, es que el margen de ganancia debe ser superior a 6 db y el margen de fase debe estar comprendido entre 30 y 60°. Con estas condiciones se obtiene, además de la estabilidad del sistema, una buena respuesta transitoria del mismo, cualquiera que sea el orden de la función $G(s)H(s)$, y una sólida garantía de que el sistema no se hará inestable si los parámetros del mismo varían dentro de los márgenes considerados como normales.

9.7 ESTABILIDAD EN LOS DIAGRAMAS DE BODE Y NICHOLS

El punto $-1 + 0j$ del diagrama de Nyquist tiene como expresión polar $1 \cdot e^{-n\pi}$, por lo que le corresponderá en el diagrama de Bode el módulo y el argumento:

$$A [db] = 20 \log 1 = 0 \quad [EE]$$

$$\psi = - \pi \quad [FF]$$

Le corresponderá, pues, la horizontal de 0 db y la de $-\pi$. Aplicando el criterio de Nyquist deberá cumplirse, pues, para que un sistema sea estable, que la amplitud expresada en decibelios, correspondiente a la frecuencia de cruce ω_ψ , sea negativa. o lo que es lo mismo, $\omega_\psi > \omega_g$, tal como puede comprobarse en la [Figura 13](#). En la misma figura se observa cómo la obtención de márgenes de ganancia y de fase es inmediata y cómo la condición de estabilidad es que ambos sean positivos para sistemas estables y negativos para los inestables.

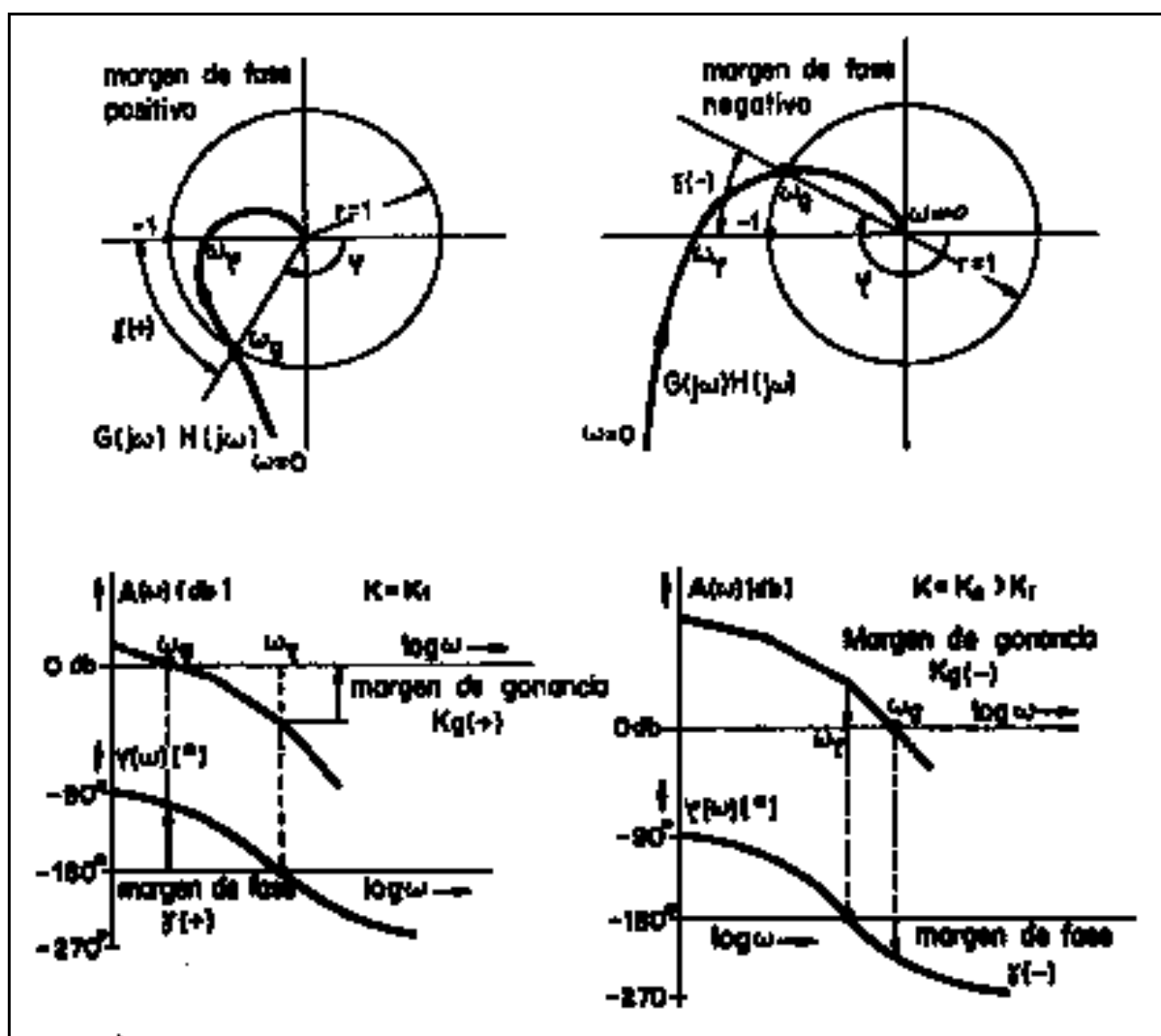


Figura 13 Estabilidad en el diagrama de Bode

En estos diagramas puede verse claramente el efecto de una modificación de la ganancia del sistema. Partiendo de un valor K_1 a otro K_2 , mayor, se modifica sólo la curva correspondiente a la amplitud, que se desplaza hacia arriba una cantidad igual a $20 \log (K_1 / K_2)$. En consecuencia, disminuirá el margen de ganancia en la misma, pudiendo el sistema llegar a hacerse inestable si éste resulta negativo. Igualmente, resultará modificado el margen de fase puesto que, para la ganancia K_2 , la frecuencia de cruce de ganancia, al desplazarse la curva de amplitud, resulta superior, lo que origina una disminución del margen de fase.

Para determinar la estabilidad en un diagrama de Nichols basta extrapolar las

definiciones anteriores a este tipo de representación, tal como se muestra en la [Figura 14](#).

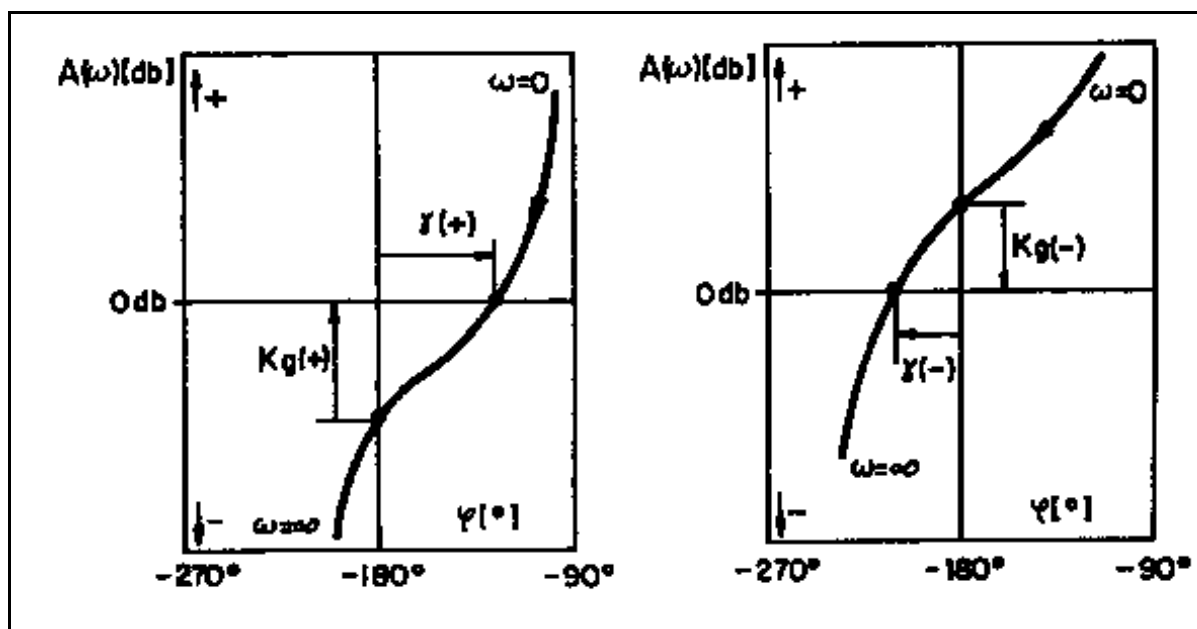


Figura 14 Estabilidad en el diagrama de Nichols

Si la curva corta a la recta de $-\pi$ por debajo de la línea de 0 db, el sistema será estable; si lo hace por encima, será inestable.

9.8 RESPUESTA FRECUENCIAL EN LAZO CERRADO: ABACO DE NICHOLS

Como se ha visto hasta ahora, se puede abordar el análisis de estabilidad de un sistema de control conociendo sólo la función de transferencia en lazo abierto del sistema. Sin embargo, para la aplicación de las especificaciones en el diseño de sistemas de control, generalmente es necesario conocer la función de transferencia en lazo cerrado.

Como se sabe, la función de transferencia en lazo cerrado para una variación en el punto de consigna viene dada por una expresión del tipo:

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

[GG]

Como en esta expresión, la función de transferencia en lazo cerrado depende directamente de la de lazo abierto, se puede desarrollar un método gráfico en el dominio de la frecuencia que permita obtener la primera a partir de la segunda, de gran utilidad cuando se trabaja con funciones de transferencia complicadas, sobre todo porque se obtiene una representación única, válida para cualquier sistema.

En efecto, en el dominio de la frecuencia, la función de transferencia en lazo abierto puede ponerse en la forma polar:

$$G(\omega j) H(\omega j) = r_o e^{\theta_o j} \quad [\text{HH}]$$

siendo r_o la amplitud y θ_o el ángulo de fase de la función de transferencia en lazo abierto, a una frecuencia ω .

Asimismo, poniendo en forma polar la función de transferencia en lazo cerrado, se obtiene:

$$\frac{G(\omega j) H(\omega j)}{1 + G(\omega j) H(\omega j)} = r_c e^{\theta_c j} \quad [\text{II}]$$

siendo r_c la amplitud y θ_c el ángulo de fase de la función de transferencia en lazo cerrado a la frecuencia ω .

Así pues, sustituyendo [34] en [35]:

$$r_c e^{\theta_c j} = \frac{r_o e^{\theta_o j}}{1 + r_o e^{\theta_o j}} \quad [\text{JJ}]$$

Reordenando esta expresión para obtener r_c y θ_c como funciones explícitas de r_o y θ_o , se obtiene:

$$r_c = \frac{r_o}{\sqrt{(1 + 2 r_o \cos \theta_o + r_o^2)}} \quad [\text{KK}]$$

$$\theta_c = \arctan \left(\frac{\text{sen } \theta_o}{r_o + \cos \theta_o} \right) \quad [\text{LL}]$$

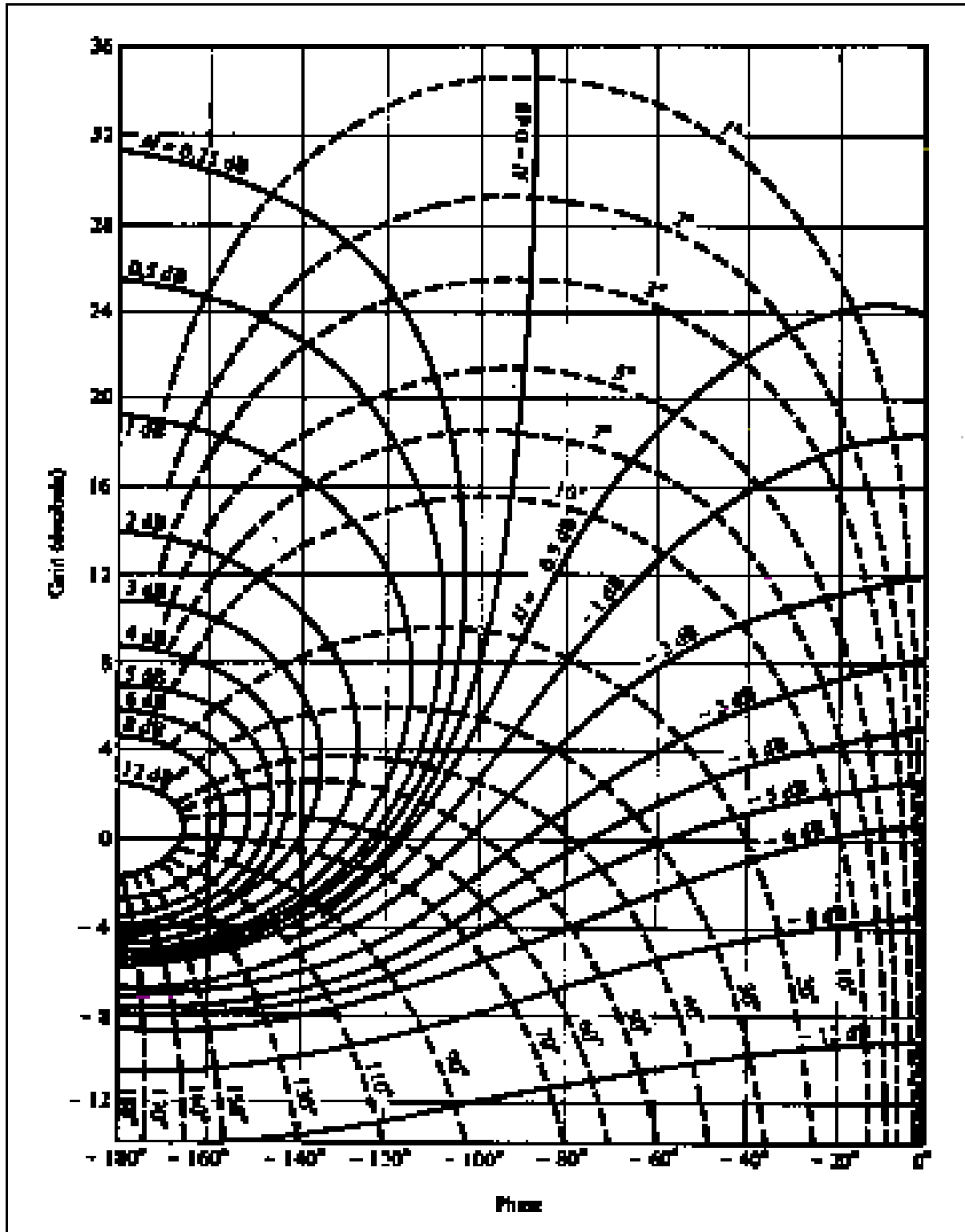


Figura 15 Abaco de Nichols (-180° a 0°)

La representación de $L = -20 \log r_c$ frente a θ_c (diagrama de Nichols) genera familias de curvas de módulo constante, llamadas "**curvas M**" y familias de curvas de ángulo de fase constante, llamadas "**curvas N**". La representación de estas curvas se denomina "**ábaco de Nichols**". El ábaco de Nichols se extiende desde 0° a 360° (la [Figura 15](#) muestra la mitad, ya que es simétrico), pero la región más comúnmente utilizada es la comprendida entre -90° y -270° , que se representa en la [Figura 16](#).

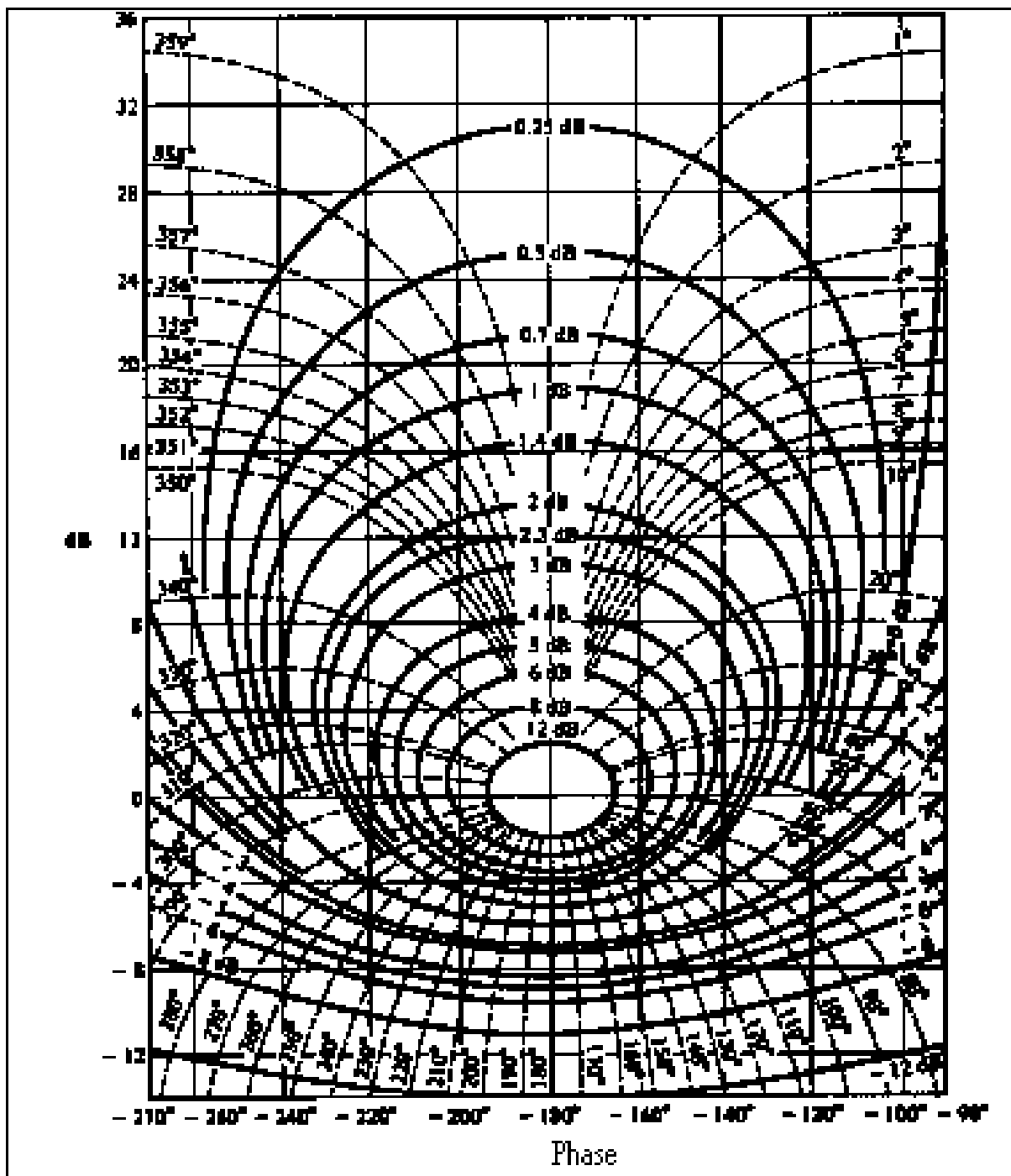


Figura 16 Abaco de Nichols (-270° a -90°)

Obsérvese que los lugares de M y N convergen hacia el punto 0 db, -180° , que corresponde al $-1 + 0j$ del diagrama de Nyquist. Si se incluye en el ábaco de Nichols la curva correspondiente a la respuesta de frecuencia en lazo abierto, se podrán

obtener las curvas de amplitud y ángulo de fase de la respuesta de frecuencia en lazo cerrado hallando la intersección de $G(\omega j)H(\omega j)$ con los lugares de M y N, respectivamente.

Así, dada la función de transferencia en lazo abierto, $G(s)H(s)$ de un determinado sistema de control, se puede obtener el diagrama de Bode de la función de transferencia en lazo cerrado, $M(s)$ de la siguiente forma:

- a) Partiendo de la función $G(s)H(s)$ se trazarán los diagramas de Bode correspondientes: curvas logarítmicas $A(\omega)$ y $\psi(\omega)$ del sistema en lazo abierto.
- b) Se trasladarán las curvas obtenidas al ábaco de Nichols, eligiendo los puntos convenientes en los diagramas de Bode (normalmente aquéllos en que las curvas cambian bruscamente de pendiente), tomando los valores de $A(\omega)$ y $\psi(\omega)$ y llevándolos gráficamente al ábaco de Nichols. Uniendo todos los puntos obtenidos se tendrá la curva $A(\omega)-\psi(\omega)$ correspondiente a la función de transferencia en lazo abierto, $G(\omega j)H(\omega j)$.
- c) A partir de la curva obtenida se construirán, con ayuda de los lugares M y N de ganancia y fase constante, los diagramas de Bode correspondientes al sistema en lazo cerrado. Para ello se tomarán diversos puntos de intersección de la mencionada curva con los lugares M o N. Quedarán así determinados los valores de $A'(\omega)$ y $\psi'(\omega)$, pertenecientes a la función de transferencia en lazo cerrado $M(\omega j)$. La frecuencia ω que corresponde a los puntos de intersección se determina trazando una horizontal por cada uno de ellos hasta cortar la curva de amplitud de $G(\omega j)H(\omega j)$ del sistema en lazo abierto.

CAPITULO 10

DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL

10.1 OBJETIVOS	<u>1</u>
10.2 METODOLOGIA PARA EL DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL	<u>2</u>
10.3 RELACION ENTRE LAS REPUESTAS FRECUENCIAL Y TRANSITORIA ...	<u>3</u>
10.4 ESPECIFICACIONES DE FUNCIONAMIENTO	<u>8</u>
10.5 CONDICIONES BASICAS EXIGIBLES A UN SISTEMA DE CONTROL	<u>10</u>
10.6 DISEÑO BASADO EN EL LUGAR DE LAS RAICES	<u>12</u>
10.7 DISEÑO BASADO EN LA RESPUESTA FRECUENCIAL	<u>16</u>
10.8 SELECCION Y AJUSTE DE LOS MODOS DE CONTROL	<u>18</u>
10.8.1 METODO DE TANTEO	<u>20</u>
10.8.2 METODO DE LA GANANCIA LIMITE (ZIEGLER-NICHOLS)	<u>21</u>
10.8.3 METODO DE LA CURVA DE REACCION (COHEN-COON)	<u>22</u>

10.1 OBJETIVOS

Normalmente, los datos de que se dispone para el diseño de un sistema de control suelen ser los siguientes:

- a) La planta o proceso a controlar, definida como un conjunto de dispositivos y componentes cuyo comportamiento sea perfectamente conocido.
- b) La variable a controlar, es decir, la magnitud cuya variación en función del tiempo ha de mantenerse constante o deba seguir una determinada ley.
- c) Los puntos del sistema donde pueden producirse las perturbaciones.
- d) Las especificaciones a que debe ajustarse la variable controlada.

En principio, el objetivo del diseño consiste en definir una estructura adecuada para el sistema de control, de forma que éste cumpla las especificaciones que le han sido impuestas a la variable controlada. Para ello se deberá elegir un accionador que actúe sobre el proceso, un dispositivo de medida para captar la señal de salida o variable controlada y un detector de error para comparar la variable realimentada con la referencia. Las características del accionador y del dispositivo de medida vienen directamente fijadas por el tipo de proceso o planta a regular.

Elegidos todos los componentes del dispositivo de control, deberá analizarse el comportamiento del sistema y, si fuera necesario, la forma en que éste ha de ser corregido. Para ello se determinarán las ecuaciones que caracterizan el comportamiento dinámico del sistema y, a partir de éstas, el diagrama de bloques.

Representando el lugar de las raíces o la función de transferencia senoidal en lazo abierto del sistema, se tiene la información necesaria para juzgar sobre la estabilidad del sistema realimentado. El resultado normal suele ser que, al tratar de ajustar la configuración básica del sistema para que cumpla determinadas especificaciones, resulta un sistema inestable o, por el contrario, si se va a un sistema estable, es a costa de no cumplir determinadas especificaciones.

El método usual para conseguir que un sistema de control resulte estable, cumpliendo además las restantes especificaciones, es modificar la estructura del mismo incorporando un elemento adicional que altere el comportamiento del conjunto, de forma que la respuesta del sistema modificado sea satisfactoria. Este elemento es

el controlador, cuya misión es conducir al sistema a tener una respuesta transitoria aceptable, manteniendo la precisión deseada para su respuesta en régimen permanente. Ambos objetivos son contrapuestos, ya que errores reducidos implican ganancias elevadas y, portanto, inestabilidad. Este hecho resalta la importancia de las especificaciones fijadas al sistema ya que, si son demasiado rígidas, exigirán un control excesivamente complejo y costoso, o incluso irrealizable.

Aunque se pueden establecer distintos tipos de control (serie, paralelo o previo), normalmente el control en serie suele ser el más sencillo de todos. En este tipo, el controlador se sitúa en serie con los elementos de la cadena directa, consistiendo el diseño en determinar el modo de control a utilizar y sus parámetros. No obstante, la elección del tipo de control más adecuado para un caso concreto depende de diversas circunstancias: la naturaleza de las señales que actúan sobre el sistema, los niveles de potencia en los diversos puntos del mismo, la experiencia del diseñador y los condicionamientos económicos.

10.2 METODOLOGIA PARA EL DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL

Uno de los problemas más importantes que se presentan al diseñar un sistema de control es la selección y dimensionado del elemento de control. Para resolverlo existen dos posibilidades, basadas en los métodos denominados de "**síntesis**" y de "**análisis**".

El método de síntesis consiste en partir directamente de las especificaciones fijadas para el sistema, determinando analíticamente el modo de control necesario y sus parámetros. Utilizando este método se llega a unas características del controlador únicas y perfectamente definidas, es decir, sólo ese controlador cumple con las especificaciones dadas. Aunque se pueden obtener soluciones perfectamente satisfactorias, este método presenta ciertos inconvenientes: es difícil fijar unas buenas especificaciones, el controlador obtenido suele ser materialmente muy complejo, es decir, de alto coste, y es asimismo muy sensible a ligeras variaciones en los parámetros del sistema.

El método de análisis utiliza un procedimiento de tanteo y ajuste para llegar a la solución deseada, que no es única, sino una de las muchas posibles. Para ello se parte de una función de transferencia en lazo abierto del sistema (incluido el controlador) adecuadamente seleccionada y se comprueba si la respuesta del sistema en lazo cerrado cumple las especificaciones fijadas. En caso contrario, se procede a modificar convenientemente los parámetros del controlador, repitiendo el proceso descrito hasta obtener la solución satisfactoria.

Los inconvenientes citados para el método de síntesis han conducido a que, salvo en diseños muy críticos y de alto grado de precisión, se vaya al empleo de controladores normalizados con configuraciones experimentadas que, mediante el ajuste de sus parámetros, permitan ser utilizados en una amplia gama de sistemas de control, y que normalmente no están sometidos a especificaciones tan rígidas. El diseño se aborda mediante procedimientos de análisis basados en los métodos del lugar de las raíces y de respuesta frecuencial, aunque en muchos casos se utilicen métodos empíricos que permiten obtener resultados bastante satisfactorios.

10.3 RELACION ENTRE LAS RESPUESTAS FRECUENCIAL Y TRANSITORIA

Como se ha visto anteriormente, la respuesta frecuencial estudia el comportamiento del sistema, en régimen permanente, ante excitaciones senoidales de amplitud constante y frecuencia variable, por lo que no facilita información directa sobre la respuesta transitoria

del sistema. Sin embargo, en el caso de sistemas de segundo orden simples y con realimentación unitaria, se pueden obtener relaciones matemáticas exactas entre las respuestas frecuencial y transitoria.

Para los sistemas de orden superior podrían hallarse también este tipo de relaciones, pero su obtención es bastante laboriosa y de escaso valor práctico. Por ello, el estudio de tales sistemas suele realizarse aproximando cada sistema de orden

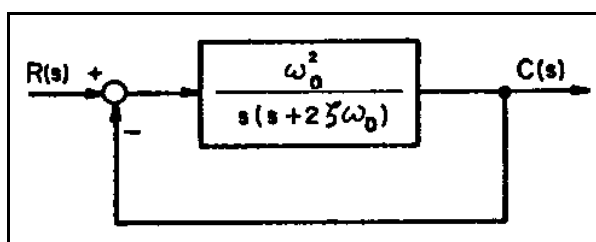


Figura 1 Sistema simple de segundo orden con realimentación unitaria

superior por el correspondiente de segundo orden y adecuando después los resultados.

Si se considera un sistema de segundo orden como el representado en la [Figura 1](#), su función de transferencia en lazo cerrado será:

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_o^2}{s^2 + 2\gamma\omega_o s + \omega_o^2} \quad [\text{A}]$$

Partiendo de la función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s)H(s) = G(s) \cdot 1 = \frac{\omega_o^2}{s(s + 2\gamma\omega_o)} \quad [\text{B}]$$

se tendrá como respuesta frecuencial en lazo abierto:

$$G(j\omega) = \frac{\omega_o^2}{j\omega(j\omega + 2\gamma\omega_o)} = \frac{-\omega_o^2\omega - 2\omega_o^3\gamma j}{\omega(\omega^2 + 4\gamma^2\omega_o^2)} \quad [\text{C}]$$

siendo:

$$A(\omega) = \frac{\omega_o^2}{\omega^4 + 4\gamma^2\omega_o^2\omega^2} \quad [\text{D}]$$

$$\psi(\omega) = \arctan \frac{2\omega_o\gamma}{\omega} \quad [\text{E}]$$

Relacionando ahora los conceptos de respuesta frecuencial (frecuencias de cruce de ganancia y de fase, márgenes de fase y de ganancia) con los de respuesta transitoria (coeficiente de amortiguamiento, frecuencias natural y amortiguada,

sobreoscilación, etc.), se pueden obtener las expresiones mostradas en la [Figura 2](#).

Capítulo 10

$$M_p[\%] = 75 - \gamma[^\circ] \text{ (aprox.) } \gamma > 27^\circ ; M_p < 46\%$$

Tiempo de subida $t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad \cos \theta = \zeta$

$$0 < \zeta < 1$$

Tiempo de pico $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad 0 < \zeta < 1$

Tiempo de establecimiento $t_s = \frac{\pi}{\zeta \omega_n} \quad \text{(aprox.) } 0 < \zeta < 0,4$

Tiempo de retardo $t_d = \frac{1 + \zeta/\sqrt{2}}{\omega_n} \quad \text{(aprox.) } 0 < \zeta < 1$

Margen de fase $\gamma = \arctg \frac{2 \zeta}{[\sqrt{4 \zeta^4 + 1 - 2 \zeta^2}]^{1/2}}$

$$\gamma[^\circ] = 100 \zeta \quad \text{(aprox.) } 0 < \zeta < 0,7$$

$$0^\circ < \gamma < 64^\circ$$

Frecuencia de cruce

de ganancia $\omega_g = \omega_n [\sqrt{4 \zeta^4 + 1 - 2 \zeta^2}]^{1/2}$

Pico de resonancia $M_r = \frac{1}{2 \zeta \sqrt{1 - 2 \zeta^2}} \quad 0 < \zeta < 0,707$

Frecuencia de resonancia $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2 \zeta^2} \quad 0 < \zeta < 0,707$

Ancho de banda $B = \omega_n [(1 - 2 \zeta^2) + \sqrt{(1 - 2 \zeta^2) + 1}]^{1/2}$

Figura 2 Relación entre respuestas transitoria y frecuencial

$$B = \frac{0,5}{t_r} \quad \text{(aprox.) } 0 < \zeta < 1$$

Las relaciones obtenidas (algunas de ellas, aproximadas) sólo son exactas para los sistemas de segundo orden simples y con realimentación unitaria, mientras que para los sistemas de orden superior pueden considerarse como aproximadas. A la vista de las mismas pueden establecerse las siguientes

reglas prácticas, útiles en el diseño.

- a) El valor de la frecuencia de resonancia, ω_r , está relacionado con la velocidad de respuesta transitoria; cuanto mayor sea ω_r , más rápido es el sistema.
- b) La frecuencia de resonancia, ω_r , y la frecuencia amortiguada para la respuesta a escalón, ω_d , tienen valores muy próximos entre sí en el caso de sistemas poco amortiguados.
- c) La frecuencia amortiguada, ω_d , está comprendida entre las frecuencias de cruce de ganancia, ω_g , y la de cruce de fase, ω_ψ .
- d) La amplitud del pico de resonancia, M_r , es un índice de estabilidad relativa del sistema. Valores de $1 < M_r [\text{db}] < 3$, que corresponden a amortiguamientos de $0,4 < \gamma < 0,7$, proporcionan una buena respuesta transitoria con sobreoscilación $12 < M_p (\%) < 30$.
- e) El ancho de banda de un sistema, B (frecuencia a la cual $M = 0,7 M_{\omega \rightarrow \infty}$), está estrechamente relacionado con la frecuencia natural del mismo, ω_o (frecuencia de corte). Valores elevados de esta frecuencia dan lugar a respuestas rápidas.
- f) El tiempo de establecimiento, t_s , está inversamente relacionado con la frecuencia natural del sistema, ω_o (frecuencia de corte).
- g) Con objeto de atenuar al máximo las perturbaciones debidas al ruido, de frecuencias superiores a las de corte, suele tomarse el ancho de banda lo más reducido posible, dentro de un compromiso adecuado para que las señales de variación brusca sean aceptablemente reproducidas.

10.4 ESPECIFICACIONES DE FUNCIONAMIENTO

Las especificaciones de funcionamiento de un sistema de control son el conjunto de características que ha de presentar éste para cumplir determinados objetivos en cuanto a su funcionamiento. Normalmente, dichas características suelen ser expresadas mediante el valor de indicadores gráficos o numéricos que afectan al comportamiento del sistema, tanto en régimen transitorio como permanente y suelen referirse a su precisión, estabilidad relativa y velocidad de respuesta.

El establecimiento de estas especificaciones es una de las partes más

importantes del proceso de diseño. Por ello, es absolutamente necesario elegir aquéllas que sean más adecuadas para el método de diseño que se vaya a utilizar, tratando además de que las condiciones que se fijen para las mismas no sean innecesariamente severas.

Aunque los sistemas de control pueden ser de muy diversas características, es de uso extendido dar sus especificaciones de funcionamiento referidas al sistema de segundo orden normalizado. Cuanto más se aproxime el sistema tratado al de segundo orden, tanto mayor será la precisión con que las especificaciones serán cumplidas.

Como es sabido, los sistemas lineales de control pueden ser estudiados para su diseño en tres dominios: en el del tiempo, en el de Laplace y en el de la frecuencia. Por ello suelen definirse las especificaciones de forma que resulten coherentes con los métodos de análisis utilizados en cada uno de los mencionados dominios. En la práctica, las especificaciones más utilizadas son las siguientes:

a) En el dominio del tiempo:

Sobreoscilación M_p
Tiempo de subida t_r
Tiempo de establecimiento t_s
Constante de error K_e

b) En el dominio de Laplace:

Coeficiente de amortiguamiento γ
Factor de amortiguamiento σ
Frecuencia natural no amortiguada ω_o
Constante de error K_e

c) En el dominio de la frecuencia:

Margen de fase ϕ
Margen de ganancia K_g
Ancho de banda B
Pico de resonancia M_r
Frecuencia de resonancia ω_r
Constante de error K_e

DINAMICA DE SISTEMAS, SIMULACION Y CONTROL

Capítulo 10

Estas especificaciones no son absolutamente independientes entre sí, sino que, conocidas algunas de ellas, no es necesario dar otras, ya que contienen la misma información. Para el diseño de sistemas de control, la experiencia ha aconsejado agruparlas en tres grupos, cada uno de los cuáles suministra la misma información global:

Grupo I:

Sobreoscilación M_p
Coeficiente de amortiguamiento γ
Margen de fase ϕ
Constante de error K_e

Grupo II:

Tiempo de subida t_r
Ancho de banda B
Frecuencia de resonancia ω_r
Constante de error K_e

Grupo III:

Tiempo de establecimiento t_s
Frecuencia de cruce de ganancia ω_g
Constante de error K_e

Podrían establecerse otros grupos, pero para cada diseño se suelen utilizar con preferencia ciertas especificaciones para determinados casos concretos, lo que hace que no exista una normativa claramente definida. Así, un conjunto de especificaciones clásico suele incluir una de cada una de los grupos indicados, ya que, como se ha expuesto previamente, cada grupo suministra la misma información.

10.5 CONDICIONES BASICAS EXIGIBLES A UN SISTEMA DE CONTROL

Considérese el esquema básico de la [Figura 3](#), en el que se representa

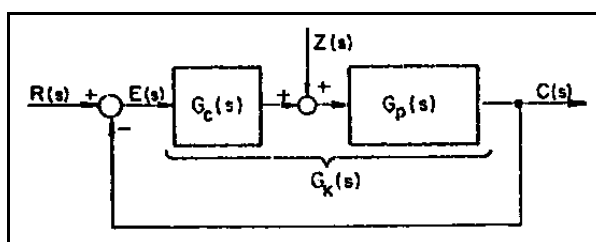


Figura 3 Sistema elemental de control

un lazo elemental de control, con realimentación unitaria y un controlador en serie, cuya función de transferencia es $G_c(s)$, sometido a una excitación $R(s)$ y a perturbaciones $Z(s)$, que se supone que actúan entre la salida del controlador y la entrada de la planta.

La ecuación general de este sistema será:

$$C(s) = \frac{G_K}{1 + G_K} R(s) + \frac{G_P}{1 + G_K} Z(s) = G_E(s) R(s) + \frac{G_E(s)}{G_c(s)} Z(s) \quad [F]$$

siendo $G_E(s)$ la función de transferencia en lazo cerrado para la perturbación en $R(s)$ y $G_z(s) = G_E(s)/G_c(s)$ la función de transferencia en lazo cerrado para la perturbación en la carga, $Z(s)$. Utilizando estas relaciones se pueden obtener conclusiones referentes al comportamiento del sistema, tanto ante perturbaciones en el punto de consigna, $R(s)$, como ante perturbaciones en la carga, $Z(s)$. Sin embargo, el estudio se realiza casi siempre sólo para el punto de consigna $R(s)$, con el fin de evitar repeticiones de cálculo.

En principio, la misión fundamental que ha de cumplir un sistema de control consiste en hacer que, dentro de un dominio de frecuencias lo más amplio posible, la salida del sistema siga exactamente al punto de consigna y que la influencia sobre el mismo de las perturbaciones sea nula o mínima. Como punto de partida suele darse normalmente la función de transferencia del proceso o planta a regular, $G_p(s)$, debiendo elegirse y dimensionarse la función de transferencia del controlador, $G_c(s)$, de modo que el sistema cumpla una serie de especificaciones, que serán diferentes según la función a desempeñar por el mismo. Para alcanzar tal fin interesa estudiar, primeramente, las condiciones fundamentales que todo sistema de control ha de cumplir. Dichas condiciones son:

Primera condición: El sistema de control ha de ser estable. Esta condición implica que, una vez desaparecida la perturbación, la salida del sistema debe adquirir, transcurrido un tiempo suficiente, un valor fijo y determinado; en caso contrario, el sistema no es utilizable.

Segunda condición: El sistema de control ha de tener una determinada precisión en régimen estacionario. Esta condición significa que, transcurrido un espacio suficiente de tiempo, la respuesta del sistema no sólo ha de adquirir un valor fijo y determinado, sino que éste ha de ser igual al de consigna, $R(s)$, o, al menos, muy próximo a él; además ha de ser prácticamente insensible a las perturbaciones.

Tercera condición: El sistema de control ha de estar adecuadamente amortiguado. Un amortiguamiento pequeño dará lugar a una respuesta rápida del sistema, con fuerte sobreoscilación y larga duración del período transitorio. A medida que aumenta el amortiguamiento disminuyen la sobreoscilación y la duración del período transitorio, hasta hacerse la respuesta aperiódica y mucho más lenta. Si se desea una respuesta transitoria normal, sin sobreoscilación ni duración del período transitorio excesivos, deben tomarse valores del coeficiente de amortiguamiento, γ , comprendidos entre 0,5 y 0,7. Si se desea una respuesta aperiódica, el valor de γ ha de estar comprendido entre 0,8 y 0,9. Respecto al comportamiento del sistema para las perturbaciones, el valor mínimo de γ suele ser de 0,3 para no comprometer la estabilidad.

Cuarta condición: El sistema de control ha de ser suficientemente rápido. Como se puede observar, esta condición es contradictoria con la anterior, pues si se hace el sistema rápido se puede provocar la inestabilidad, como demuestra el análisis de Nyquist.

Además de las condiciones básicas citadas, el sistema de control deberá cumplir otras especificaciones, normalmente dadas en forma de desigualdades entre determinados parámetros de respuesta transitoria, para lo que se utilizan los métodos de análisis estudiados en los capítulos precedentes.

10.6 DISEÑO BASADO EN EL LUGAR DE LAS RAICES

El método del lugar de las raíces es un procedimiento gráfico de diseño especialmente adecuado para proyectar sistemas de control cuando las especificaciones de éstos vienen dadas en el dominio del tiempo o en el dominio de Laplace.

Mediante este método se trata de introducir un elemento de control que modifique el comportamiento del sistema, de forma que éste resulte aceptable, tanto en régimen transitorio como en régimen permanente.

Para juzgar sobre el comportamiento del sistema en régimen transitorio, se supone aquél sometido a una excitación de tipo escalón unitario y se estudia hasta qué punto la respuesta del mismo, en su parte transitoria, es capaz de seguir a la señal excitadora.

La experiencia ha demostrado que la respuesta al escalón unitario de un sistema puede considerarse como aceptable y realizable cuando es semejante a la de un sistema de segundo orden cuyo coeficiente de amortiguamiento, γ , está comprendido entre 0,3 y 0,8, al que corresponden oscilaciones M_p comprendidas entre el 35 y el 5 %. Sobreoscilaciones superiores al 35 % suponen sistemas excesivamente oscilatorios, que han de ser amortiguados; sobreoscilaciones inferiores al 5 % corresponden a sistemas excesivamente lentos, cuya respuesta debe ser acelerada disminuyendo el amortiguamiento.

Para juzgar sobre el comportamiento del sistema en régimen permanente se investiga el valor de las constantes de error (ganancia del proceso). Cuanto mayor sea el valor de las constantes de error, más pequeño será éste y, por tanto, mejor será la respuesta del sistema en su parte correspondiente al régimen permanente. En consecuencia, para mejorar la respuesta en régimen permanente de un sistema, los esfuerzos irán dirigidos a aumentar adecuadamente el valor de las correspondientes constantes de error.

El motivo por el que se ha tomado como elemento de juicio el escalón unitario y el valor de la constante de error es meramente empírico. Corresponde al hecho comprobado de que, si la respuesta a un escalón unitario es aceptable y el valor de la constante de error es suficientemente elevado, el sistema responderá generalmente ante cualquier entrada.

Como se ha visto en el **Capítulo 8**, el lugar de las raíces facilitará información sobre la relación existente entre la ganancia K del sistema y la respuesta temporal del mismo. En consecuencia, dadas las especificaciones a cumplir por el sistema, se

tratará de ajustar dicha relación de forma que las mencionadas especificaciones sean aceptablemente cumplidas. Si no pudiera cumplirse tal objetivo mediante el mero ajuste de la ganancia, será necesario reformar el lugar de las raíces original, introduciendo en el sistema el controlador más adecuado, que no hace sino aportar polos y ceros adicionales, adecuadamente elegidos para mejorar el comportamiento del sistema original.

Obsérvese que para el análisis de un sistema complejo en el lugar de las raíces se pueden despreciar los polos muy alejados del eje imaginario porque dan lugar a modos transitorios que se amortiguan rápidamente y los polos y ceros cuya situación sea muy próxima o coincidente, ya que dan lugar a modos transitorios de amplitud muy pequeña. Procediendo de esta forma se obtiene un "**sistema equivalente de orden reducido**", cuyos polos más próximos al eje imaginario determinan el comportamiento de la respuesta transitoria del sistema y se llaman "**polos dominantes**".

La práctica demuestra que frecuentemente aparecen en los sistemas de control polos dominantes de lazo cerrado en forma compleja conjugada, lo que permite estudiar el comportamiento del sistema como si se tratase de uno de segundo orden, simple o con polo o cero adicional. La coincidencia entre los resultados obtenidos y los correspondientes al sistema real será tanto mejor cuanto más justificada resulte la eliminación de los ceros y polos despreciados. A título indicativo puede decirse que, si la relación entre las partes reales de los polos excede de 5, y no hay ceros cercanos, los polos de lazo cerrado más próximos al eje imaginario pueden ser considerados como dominantes.

Normalmente se obtiene una buena aproximación en los cálculos si el sistema equivalente de orden reducido está formado por:

- * Dos polos complejos conjugados y uno real, situado a la izquierda de ellos y a suficiente distancia.
- * Dos polos complejos conjugados con un polo y un cero reales, estos últimos relativamente próximos entre sí.

Como punto de partida para determinar la posición de los polos y ceros del

controlador, deberán considerarse los efectos que origina la adición de ceros y polos sobre el lugar de las raíces, estudiados en el **Capítulo 8**.

La introducción de un polo adicional en la función de transferencia en lazo abierto del sistema, produce el efecto de desplazar el lugar de las raíces hacia la parte real positiva del plano s , lo que representa una disminución de la estabilidad relativa del sistema en lazo cerrado, que puede hacerse inestable para grandes valores de la ganancia K . Esto sucede para el controlador PI que, por introducir un polo en el origen, hace el sistema más inestable, aunque mejora la respuesta en régimen permanente.

La introducción de un cero adicional en la función de transferencia en bucle abierto del sistema, desplaza el lugar de las raíces en el sentido de alejarlo del eje imaginario, dentro del semiplano de parte real negativa, tendiendo a hacer el comportamiento de éste en lazo cerrado más estable y acelerar su respuesta. Tal es el caso del controlador PD que, por introducir un cero adicional, mejora la respuesta transitoria acelerándola, aunque aumenta el error en régimen permanente.

Evidentemente, la combinación de las acciones integral y diferencial en un controlador PID mejoran, tanto el régimen transitorio como el régimen permanente.

En definitiva, la utilización del método del lugar de las raíces para el diseño de controladores tiene la ventaja de que, una vez seleccionado el controlador y dibujado el lugar de las raíces correspondiente, pueden obtenerse los polos y ceros en lazo cerrado del sistema de forma inmediata. Igualmente puede obtenerse con facilidad la respuesta temporal del sistema, que en general muestra una correlación excelente con el lugar de las raíces. Una vez dibujado éste se puede ver perfectamente, incluso de forma cuantitativa, cuál es el efecto que se produce en la respuesta temporal del sistema cuando se altera el valor de los parámetros del controlador. Se pueden obtener también los límites de estabilidad del sistema para varios valores de los parámetros del controlador, fundamentalmente para la ganancia, aunque también para los demás (lugar de las raíces generalizado).

Las ventajas expuestas han propagado la utilización del lugar de las raíces para diseños de tipo industrial, especialmente con la creciente utilización de los ordenadores, que facilitan los trabajos de cálculo.

10.7 DISEÑO BASADO EN LA RESPUESTA FRECUENCIAL

El método de la respuesta frecuencial es un procedimiento gráfico de diseño de gran flexibilidad y eficacia que, ciñéndose estrechamente a las características físicas del sistema, facilita una visión clara del comportamiento del mismo y de las posibilidades existentes para su control.

Contrariamente a lo que sucedía con el método del lugar de las raíces, donde se podían situar los polos y ceros del controlador en el plano complejo y determinar con ello los polos y ceros en lazo cerrado del sistema controlado y su respuesta temporal, en el caso del método de la respuesta frecuencial el diseño se realiza de forma indirecta, pues el sistema se dimensiona para satisfacer unas especificaciones que no vienen dadas en el dominio del tiempo, sino en el de la frecuencia, con lo cual no quedan directamente determinados los polos en lazo cerrado del mismo. Por ello, después de hallar la función de transferencia en lazo abierto del sistema controlado utilizando las técnicas de respuesta frecuencial, deberán obtenerse los polos en lazo cerrado del sistema controlado, para comprobar si efectivamente la respuesta transitoria de éste satisface las características deseadas en el dominio del tiempo. En caso de no ser así, deberá modificarse el controlador hasta obtener un resultado satisfactorio.

Como ya se indicó anteriormente, las especificaciones que se utilizan normalmente en el dominio de la frecuencia son ϕ , K_g , M_r , ω_r , B y K . Sin embargo, el comportamiento del sistema, tanto en régimen transitorio como en régimen permanente, puede ser descrito por tres de estos parámetros, uno de cada grupo de los indicados anteriormente, teniendo en cuenta las relaciones indicadas en la [Figura 2](#). Así, se suelen dar como especificaciones M_r ($\rightarrow \gamma \rightarrow M_p$), ω_r ($\rightarrow \omega_o$) y K_e , ó ϕ ($\rightarrow \gamma \rightarrow M_p$), K y K_e ; los márgenes de fase y de ganancia dan una buena idea de la estabilidad del sistema, controlando el comportamiento del mismo en la proximidad de su frecuencia de resonancia.

Dentro de la variedad de diagramas de representación que ofrece el método de la respuesta frecuencial, la conveniencia de utilizar unos u otros para el diseño del

controlador depende del grupo de especificaciones que se haya tomado como punto de partida. Si se parte de ϕ y K_g , es evidente que los diagramas de Bode son más adecuados que los polares. Por el contrario, si se desea obtener un determinado valor para M_r , los diagramas polares o de Nichols son más convenientes que los de Bode.

De cualquier forma, cualquiera que sea el tipo de diagrama utilizado para representar la respuesta frecuencial del sistema en lazo abierto, $G(\omega_j)H(\omega_j)$, la zona de bajas frecuencias ($\omega \ll \omega_g$) indica el comportamiento en régimen permanente del sistema en lazo cerrado, la zona de frecuencias medias (alrededor del punto $-1 + 0j$) da una idea de su estabilidad relativa, y la zona de altas frecuencias ($\omega > \omega_g$) caracteriza la capacidad del sistema para la eliminación del ruido y su complejidad.

Así pues, partiendo del criterio de estabilidad de Nyquist referido al diagrama de Bode de la función de transferencia en lazo abierto, como el representado en la [Figura 4](#), puede verse que básicamente existen tres posibilidades para su control:

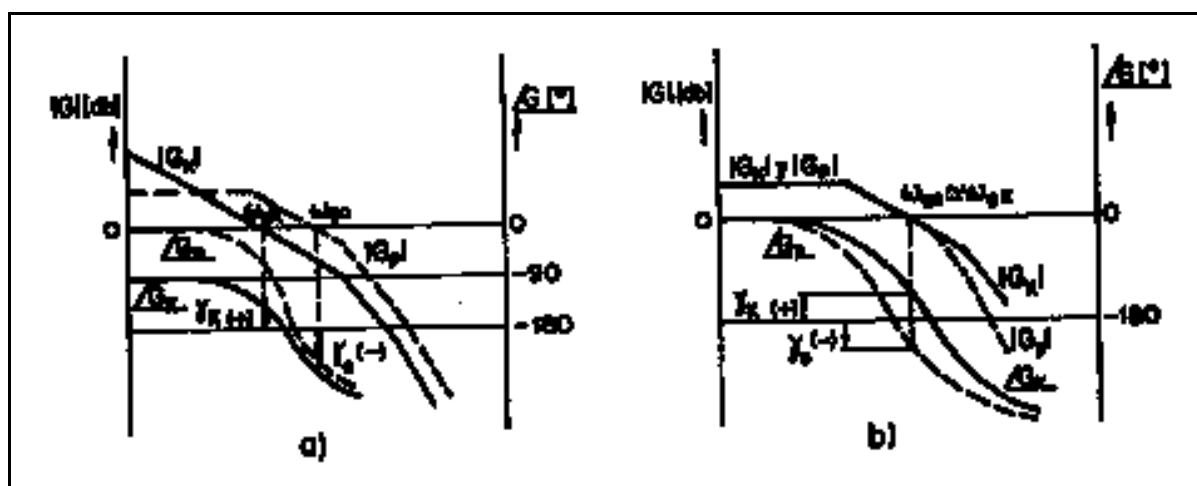


Figura 4 Diseño de controladores en el dominio frecuencial

a) Bajar la curva de amplitud:

Con esta medida ([Figura 4.a](#)) se producirá un desplazamiento de la frecuencia de cruce de ganancia hacia la izquierda ($\omega_{go} \rightarrow \omega_{gk}$) es decir, hacia una zona de frecuencias en la cual la curva de ángulo de fase presenta mayor margen de fase ($\phi_o \rightarrow \phi_k$) y, por tanto, mejor estabilidad relativa del sistema controlado. Ello se logra introduciendo en el sistema un controlador PI y únicamente ha de procurarse que el

desplazamiento de ω_g hacia la izquierda no sea excesivo, para que el sistema no resulte demasiado lento.

b) Subir la curva de ángulo de fase:

Con esta medida ([Figura 4.b](#)) se producirá un incremento del ángulo de fase con el sistema controlado, para prácticamente la misma frecuencia de cruce de ganancia ($\omega_{go} \approx \omega_{gK}$), lo que repercute en un aumento del margen de fase ($\gamma \rightarrow \gamma$) y de la estabilidad relativa. Esto se logra introduciendo en el sistema un controlador PD.

c) Simultanear las dos medidas anteriores:

Ello implica bajar la curva de amplitud y subir la de ángulo de fase en dos zonas de frecuencia diferentes, lo que se logra introduciendo en el sistema un controlador PID.

10.8 SELECCION Y AJUSTE DE LOS MODOS DE CONTROL

En los apartados anteriores se han estudiado los métodos analíticos para la selección de los valores de los modos de control, basados en la consecución de unas especificaciones determinadas, fundamentalmente en la estabilidad relativa del sistema definido por el modelo matemático correspondiente. No obstante, existen asimismo otros métodos empíricos que se pueden utilizar en el diseño, simulando el sistema en un ordenador o en la propia planta, para realizar los últimos ajustes en el controlador.

Para elegir el controlador adecuado para cada proceso, conviene recordar las características esenciales de los modos de control:

- * La acción proporcional corrige la posición del actuador proporcionalmente a la desviación de la variable respecto al punto de consigna.
- * La acción integral corrige la posición del actuador a una velocidad proporcional a la desviación respecto al punto de consigna.
- * La acción diferencial corrige la posición del actuador proporcionalmente a la velocidad de cambio de la variable controlada.

Considerando estas características, la selección del modo de control es usualmente un compromiso entre la calidad del control que se desea y el coste del

sistema de control, es decir, debe ser suficiente para satisfacer las especificaciones del proceso, pero no debe incluir excesivos refinamientos que lo encarezcan. A este respecto, si se toma como la unidad el coste del controlador más barato, el todo-nada, la relación económica entre los demás modos de control y éste, es aproximadamente la siguiente:

P: 1,3 PD: 1,4

PI: 1,5 PID: 1,6

No obstante, los instrumentos actuales de tipo modular admiten fácilmente la adición de una o más acciones.

Por otra parte se puede afirmar que, de forma general, las acciones de control necesarias para controlar las variables más importantes de un proceso son las siguientes:

- * Caudal: Se utiliza casi de forma exclusiva el control PI, utilizando una ganancia baja ($K_c \approx 0,4 - 1,2$) para reducir el efecto de la señal de medida, que contiene bastante ruido, debido a la turbulencia del flujo. Para obtener respuestas rápidas se utiliza asimismo un valor bajo del tiempo integral ($\tau_I \approx 0,1$ min/repetición).

- * Nivel: Generalmente el nivel no necesita de un control estricto, mientras se mantenga dentro de ciertos límites. Por ello se utilizan generalmente controladores P con bandas proporcionales de 50 a 100, para mantener un cierto nivel medio, pudiéndose incluso usar un control todo-nada en ciertos casos.

- * Presión: Los lazos de presión varían de ser muy rápidos (como los lazos de caudal) hasta ser muy lentos (como los lazos de nivel). Por ello se utilizan en cada caso los controladores citados para dichos procesos, es decir, PI para lazos rápidos y P para lazos lentos.

- * Temperatura: Los lazos de control de temperatura se encuentran en sistemas con cambios muy rápidos pero también con retardos apreciables, por lo que se suele utilizar el controlador PID. La ganancia suele elegirse a valores moderados ($K_c \approx 2 - 5$), dependiendo de los demás elementos del sistema, mientras que el tiempo de acción integral se suele ajustar al mismo orden de magnitud que la constante de tiempo del proceso. El tiempo de acción diferencial puede ponerse alrededor del 25% del valor de

la constante de tiempo del proceso, dependiendo de la intensidad del ruido.

Existen varios métodos empíricos para ajustar los controladores al proceso, es decir, para que sus parámetros se acoplen adecuadamente con el resto de los elementos del lazo de control de tal forma que, ante una perturbación, se obtenga una curva de recuperación que satisfaga las condiciones mencionadas en el **apartado 10.5**. No obstante, empíricamente se suele utilizar el criterio básico de área mínima de los picos de oscilación, lo que se consigue con una relación de amortiguamiento de 0,25 entre crestas sucesivas de la onda, es decir, que cada onda equivale a una cuarta parte de la anterior. A continuación se resumen los procedimientos más empleados en la práctica.

10.8.1 METODO DE TANTEO

Este método requiere que el controlador y el proceso estén completamente instalados y trabajando en su forma normal. El procedimiento general se basa en poner en marcha el proceso con bandas anchas en todas las acciones y estrecharlas después poco a poco individualmente, hasta obtener la estabilidad deseada. La forma de operar sería aproximadamente la siguiente:

- 1) Anular las acciones integral y diferencial del controlador, es decir, ajustar τ_i (min/repetición) al máximo y τ_D (min) al mínimo.
- 2) Ajustar la banda proporcional (BP) a un valor alto, por ejemplo, 200.
- 3) Poner el controlador en funcionamiento automático.
- 4) Realizar una pequeña perturbación (en el punto de consigna o en la carga) y observar la respuesta de la variable controlada. Al ser muy alta la ganancia, la respuesta será muy lenta.
- 5) Reducir a la mitad la BP (duplicar la ganancia) y realizar otra pequeña perturbación.
- 6) Seguir disminuyendo la BP, repitiendo el paso anterior, hasta que la respuesta se haga muy oscilatoria. La ganancia a la cual se produce este fenómeno se denomina "**ganancia límite**".

- 7) Reajustar la BP al doble de su valor límite.
- 8) Introducir paulatinamente la acción integral reduciendo τ_i cada vez a la mitad y realizando pequeñas perturbaciones después de cada cambio para observar el efecto que produce.
- 9) Encontrar el valor de τ_i que hace la respuesta muy oscilatoria y reajustar τ_i al doble de este valor.
- 10) Introducir paulatinamente la acción diferencial aumentando D hasta observar ruido en la señal de respuesta.
- 11) Reajustar τ_D a la mitad de este valor máximo.
- 12) Reducir la BP de nuevo en escalones del 10 % hasta que la señal satisfaga la especificación de una relación de amortiguación de 0,25.

10.8.2 METODO DE LA GANANCIA LIMITE (ZIEGLER-NICHOLS)

Este método permite calcular los tres parámetros de un controlador a partir de los datos obtenidos en una prueba rápida de características del lazo cerrado de control. Se basa en estrechar gradualmente la banda proporcional con los ajustes integral y diferencial anulados, mientras se crean pequeñas perturbaciones en el punto de consigna, hasta que la respuesta empieza a oscilar de modo continuo. Esta banda proporcional es equivalente a la llamada "**ganancia límite**", K_u ; el período de la oscilación resultante, P_u (min/ciclo) se denomina "**período límite**". Los parámetros del controlador que conducen a una relación de amortiguamiento de 0,25 se calculan a partir de estos datos mediante las siguientes ecuaciones empíricas:

* Controlador P:

$$K_c = \frac{K_u}{2}$$

[G]

* Controlador PI:

$$K_c = \frac{K_u}{2,2} \quad \tau_I = \frac{P_u}{1,2} \text{ (min/rep)} \quad [\text{H}]$$

* Controlador PID:

$$K_c = \frac{K_u}{1,7} \quad \tau_I = \frac{P_u}{2} \text{ (min/rep)} \quad \tau_D = \frac{P_u}{8} \text{ (min)} \quad [\text{I}]$$

El ajuste de Ziegler-Nichols es prácticamente un método normalizado, ya que es sencillo y permite obtener unos resultados aceptables en la mayoría de los lazos de control. Sin embargo, los valores obtenidos deben considerarse sólo como una primera aproximación, ya que para muchos sistemas de control este método no es adecuado, pudiéndose mejorar significativamente el control mediante algunos ensayos en planta.

10.8.3 METODO DE LA CURVA DE REACCION (COHEN-COON)

El procedimiento general consiste en abrir el lazo cerrado de control antes del accionador, es decir, operar éste directamente con el controlador en manual y crear una pequeña perturbación en escalón en el proceso de entrada. La respuesta obtenida se registra gráficamente, obteniéndose la denominada "**curva de reacción**" ([Figura 5](#)).

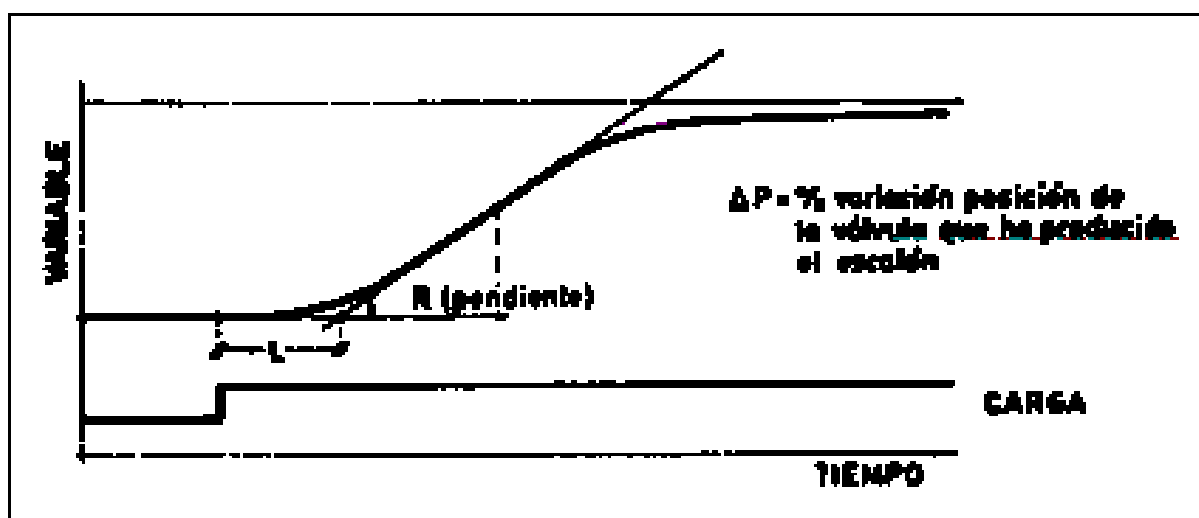


Figura 5 Curva de reacción

En el punto de inflexión de la curva obtenida se traza la tangente y se miden los valores de R (pendiente) y L (tiempo en minutos que transcurre entre la perturbación y el punto en que la tangente cruza el valor inicial de la variable controlada. Si ΔP es el porcentaje de variación de posición del actuador que introduce el escalón en el proceso, las fórmulas empíricas a aplicar serán:

* Controlador P:

$$K_c = \frac{\Delta P}{RL} \quad [J]$$

* Controlador PI:

$$K_c = 0,9 \frac{\Delta P}{RL} \quad \tau_I = \frac{L}{0,3} \text{ (min/rep)} \quad [K]$$

* Controlador PID:

$$K_c = 1,2 \frac{\Delta P}{RL} \quad \tau_I = \frac{L}{0,5} \text{ (min/rep)} \quad \tau_D = 0,5 L \text{ (min)} \quad [L]$$