

SIMULACION ANALOGICA

1 INTRODUCCION.....	1
2 COMPONENTES BASICOS.....	1
2.1 Amplificador.....	1
2.2 Potenciómetro.....	2
2.3 Resistencia y condensador.....	3
3 BLOQUES OPERACIONALES.....	3
3.1 Sumador.....	3
3.2 Integrador.....	5
4 EL COMPUTADOR ANALOGICO.....	7
5 RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES.....	8
6 FACTORES DE ESCALA.....	9
6.1 Escalado de la variable dependiente.....	9
6.2 Escalado del tiempo.....	12
6.3 Escalado conjunto.....	14
7 SIMULACION DE SISTEMAS DE CONTROL.....	14
7.1 Simulación de un sistema de primer orden.....	15
7.2 Simulación de un sistema de segundo orden.....	16
7.3 Simulación de un controlador " P ".....	18
7.4 Simulación de un controlador " PI ".....	19
7.5 Simulación de un controlador " PD ".....	20
7.6 Simulación de un controlador " PID ".....	21

1 INTRODUCCION

La simulación analógica, una de las técnicas de simulación por ordenador para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, hace uso del denominado computador analógico. Este computador aprovecha el hecho de que las ecuaciones que describen a algunos dispositivos eléctricos son completamente análogas a aquellas que describen a otros sistemas: mecánicos, térmicos, hidráulicos, químicos, etc.

Básicamente, para simular un proceso en un computador analógico, lo que se hace es conectar entre sí diferentes bloques electrónicos que llevan a cabo las diversas operaciones matemáticas que se necesitan. Los dispositivos electrónicos efectúan las operaciones matemáticas en términos de tensiones de corriente continua, normalmente $\pm 10\text{ V}$ ó $\pm 100\text{ V}$. Estas tensiones representan las variables físicas en las ecuaciones: temperaturas, composiciones, presiones, velocidades, etc.

Un computador analógico posee unos "bloques operacionales" que suman y restan tensiones, integran tensiones respecto al tiempo, multiplican y dividen tensiones, generan funciones arbitrarias, etc. Para comprender el funcionamiento global del computador será necesario, pues, estudiar previamente algunos de los componentes básicos localizados en el interior de estos bloques, para luego analizar éstos. A continuación se podrán abordar las conexiones de los bloques entre sí para poder resolver algunos problemas reales.

2 COMPONENTES BASICOS

2.1 Amplificador

El componente fundamental de un computador analógico es el amplificador operacional de alta ganancia ([Figura 1](#)).

Se trata de un dispositivo que amplifica y cambia de signo la señal de entrada, e_i .

La relación de amplificación o ganancia,

K , es muy elevada, de 10^5 a 10^8 ; por ello, cuando el amplificador está conectado con otros componentes eléctricos, su tensión de entrada efectiva siempre ha de ser nula,

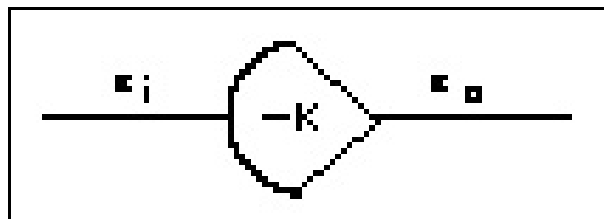


Figura 1 Representación del amplificador operacional

ya que en caso contrario, la tensión de salida, e_o , sería muy elevada. Por otro lado, el amplificador prácticamente no deja pasar la corriente, por lo que se supondrá que la intensidad a través del amplificador será cero, siendo su ecuación:

$$e_o = - K e_i \quad [1]$$

Por todo ello, el amplificador tiene dos características fundamentales cuando está conectado a un circuito eléctrico: tanto su tensión de entrada (tensión de red) como la intensidad de la corriente (corriente de la red) han de ser nulas. Estas propiedades permiten su utilización para sumar, restar e integrar tensiones, como se verá posteriormente.

2.2 Potenciómetro

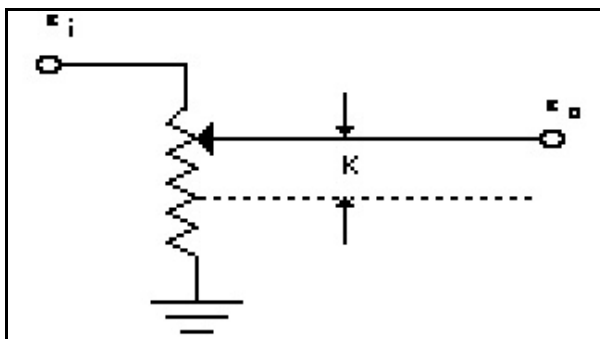


Figura 2 Potenciómetro

Un potenciómetro es una resistencia variable con un contacto móvil, tal como muestra la [Figura 2](#).

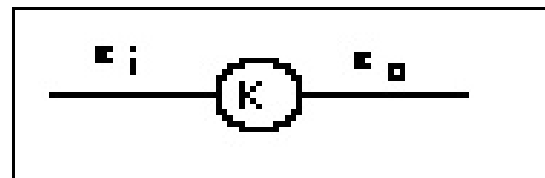


Figura 3 Representación del potenciómetro

Cuando el contacto está en la parte superior, $e_o = e_i$ ó $K = 1$; cuando el contacto está en la parte inferior, $e_o = 0$ ó $K = 0$. Normalmente la parte inferior del potenciómetro está conectada a tierra. Sin embargo, algunos potenciómetros no están conectados a tierra, de tal forma que la salida es K veces la diferencia entre las tensiones superior e inferior más la tensión inferior. La representación del potenciómetro se muestra en [Figura 3](#), y su ecuación es:

$$e_o = K e_i \quad (K < 1) \quad [2]$$

2.3 Resistencia y condensador

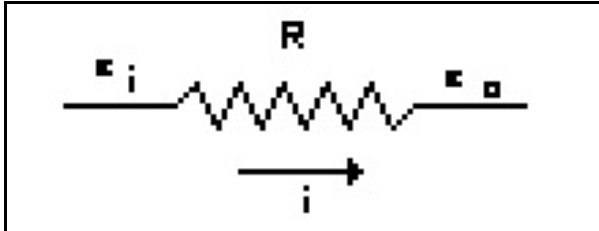


Figura 4 Representación de la resistencia

Como es sabido, una resistencia (Figura 4) es un dispositivo que dificulta el paso de la corriente, cumpliéndose, según la ley de Ohm:

$$R = \frac{e_o - e_i}{i} \quad [3]$$

Por su parte, un condensador (Figura 5) es un dispositivo que permite el almacenamiento de energía en forma de electricidad, siendo su capacidad:

$$C = \frac{Q}{e_o - e_i} = \frac{\int i dt}{e_o - e_i} \quad [4]$$

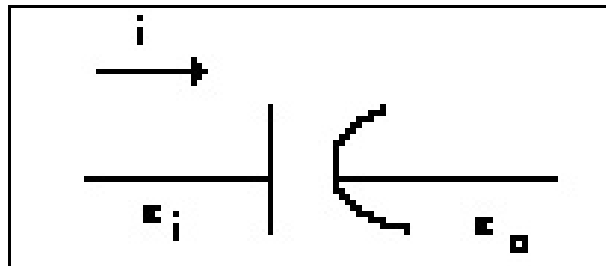


Figura 5 Representación del condensador

3 BLOQUES OPERACIONALES

3.1 Sumador

Se obtiene un sumador conectando varias resistencias a un amplificador, como se muestra en la Figura 6.

Las resistencias R_1 , R_2 y R_3 son resistencias de entrada y R_f es la resistencia de realimentación. Como ya se ha indicado, las propiedades del amplificador implican que la tensión e_g y la corriente i_g de la red han de ser nulas.

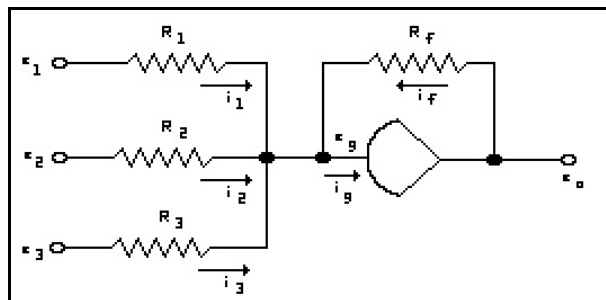


Figura 6 Bloque sumador

AUTOMATICA

En estas condiciones, los balances en el nudo dan las ecuaciones:

$$e_o - e_g = i_f R_f = e_o \quad [5]$$

$$i_1 + i_2 + i_3 = -i_f + i_g = -i_f \quad [6]$$

Como, al mismo tiempo:

$$e_1 - e_g = i_1 R_1 \quad [7]$$

$$e_2 - e_g = i_2 R_2 \quad [8]$$

$$e_3 - e_g = i_3 R_3 \quad [9]$$

se tendrá:

$$-\frac{e_o}{R_f} = \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_3}{R_3} \quad [10]$$

$$e_o = - \left(\frac{R_f}{R_1} e_1 + \frac{R_f}{R_2} e_2 + \frac{R_f}{R_3} e_3 \right) \quad [11]$$

Obsérvese que, si todos los valores de las resistencias son iguales, se obtiene una tensión de salida que es la suma de las tensiones de entrada (cambiada de signo). Si las resistencias no son

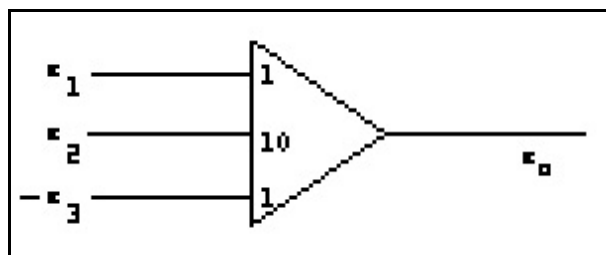


Figura 7 Representación del sumador

iguales, se puede llevar a cabo un producto por una constante mayor que 1, si $R_f > R_i$. Así, normalmente se conectan dos rangos de resistencias de entrada al computador para obtener "ganancias" (cocientes de resistencias) de 10 ($R_i = 0,1 \text{ M}\Omega$; $R_f = 1 \text{ M}\Omega$) o de 1 ($R_i = 1 \text{ M}\Omega$; $R_f = 1 \text{ M}\Omega$). La representación esquemática de un sumador es la mostrada en la [Figura 7](#), cuya ecuación es:

$$e_o = e_3 - e_1 - 10 e_2 \quad [12]$$

3.2 Integrador

La operación más importante que lleva a cabo un computador analógico es la integración; precisamente este hecho es el que permite su utilización para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

Un integrador puede obtenerse simplemente sustituyendo la resistencia del lazo de realimentación del amplificador por un condensador, tal como muestra el esquema de la [Figura 8](#).

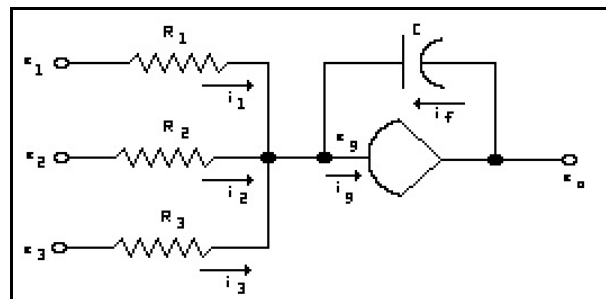


Figura 8 Bloque integrador

Como e_g ha de ser nula:

$$e_o = e_g = e_o = - \int_0^t i_f dt \quad [13]$$

de donde:

$$\frac{d e_o}{d t} = \frac{1}{C} i_f \quad [14]$$

Como, por otra parte, también se cumple que:

$$i_g - i_f = -i_f = \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_3}{R_3} \quad [15]$$

se tendrá, sustituyendo:

$$-C \frac{d e_o}{d t} = \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_3}{R_3} \quad [16]$$

Integrando:

$$e_o(t) = e_o(0) - \frac{1}{C} \int_0^t \left(\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_3}{R_3} \right) dt \quad [17]$$

donde $e_o(0)$ es la tensión inicial del condensador.

Esta condición inicial se alimenta al amplificador a través de un terminal IC, tal como se muestra en el esquema de la [Figura 9](#), proporcionando la ecuación del sistema:

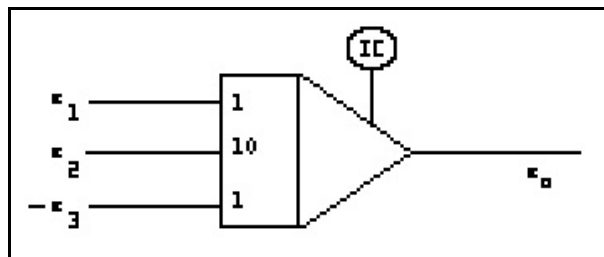


Figura 9 Representación del integrador

$$e_o = IC + \int_0^t (e_3 - e_1 - 10 e_2) dt \quad [18]$$

Obsérvese que si la salida inicial del integrador es una tensión positiva, la tensión alimentada a través de IC ha de ser negativa. Si la tensión inicial de salida es nula, IC se conectará a tierra.

Normalmente, el diseño de los computadores analógicos es tal, que las resistencias usadas son de 0,1 a 10 MΩ y los condensadores de 0,01 a 1 μF. Así, para

$R = 1 \text{ M}\Omega$ y $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$, las unidades de RC vienen dadas en segundos, es decir, que el computador analógico integra respecto al tiempo en segundos o bien, el tiempo es la variable independiente.

Si todas las resistencias son de $1 \text{ M}\Omega$ y se usa un condensador de $1 \text{ }\mu\text{F}$, la salida del integrador variará 1 V/s con una tensión total de entrada de 1V . Como en el caso del sumador, el integrador generalmente tiene entradas de ganancias 10 y 1 .

4 EL COMPUTADOR ANALOGICO

Un computador analógico es un conjunto ordenado de amplificadores, potenciómetros, fuentes de tensión de referencia y algunos otros componentes no lineales. Todos estos componentes están instalados en una caja, que incluye una fuente de tensión para alimentar los amplificadores. Las conexiones entre los componentes se realizan desde un "panel de conexión", donde pueden hacerse diversas combinaciones mediante "cables de conexión". En muchos computadores el panel de conexión es desmontable, lo cual representa una gran ventaja, pues permite guardar un circuito ya cableado para su uso posterior. Asimismo, esta disposición permite realizar el cableado sobre un panel de conexión de repuesto mientras el computador trabaja en la resolución de un problema diferente.

En los computadores de alta precisión, las resistencias y los condensadores utilizados para construir sumadores e integradores no están accesibles al usuario. Se encuentran dentro de una caja ya conectados para funcionar como bloques operacionales, lo que los protege de un mal uso.

También se dispone de una fuente de tensión de referencia, que permite establecer las condiciones iniciales de los integradores y disponer de las tensiones constantes necesarias en el circuito. Aunque los primeros computadores analógicos operaban a tensiones de $\pm 100 \text{ V}$, posteriormente se utilizó una tensión de referencia de $\pm 10 \text{ V}$, al construirse los computadores con circuitos integrados. Tensiones inferiores a la de referencia se consiguen conectando adecuadamente un potenciómetro.

Debido a que la solución de un problema por el computador es de la forma de una señal de tensión que varía con el tiempo, se necesita algún instrumento capaz de

indicar y registrar esta relación tensión-tiempo. El más adecuado es el registrador de papel o "plotter", que permite obtener una o varias salidas gráficas de la tensión en una escala de tiempos.

5 RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Para comprender cómo los componentes descritos anteriormente pueden ser utilizados para resolver una ecuación diferencial, considérese la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + b x = f(t) \quad [19]$$

donde x es la variable dependiente del problema y t es la variable independiente del problema, que puede representar un tiempo, una distancia, etc. Los coeficientes a y b son constantes positivas.

Generalmente no existe un procedimiento fijo para construir un circuito que resuelva una ecuación diferencial, por lo que suelen existir varios circuitos alternativos que resuelven satisfactoriamente el mismo problema. Sin embargo, normalmente se resuelve el problema para la derivada de más alto orden, que será igual a una combinación lineal de la variable dependiente y sus derivadas sucesivas, es decir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a \frac{dx}{dt} - b x + f(t) \quad [20]$$

Las derivadas se obtienen en el computador por integraciones sucesivas y luego se combinan mediante un sumador y los potenciómetros adecuados para que satisfagan la ecuación diferencial. El esquema de la [Figura 10](#) muestra el circuito de la ecuación diferencial en

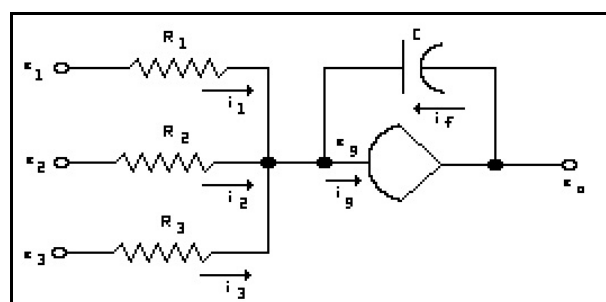


Figura 10 Circuito para la resolución de una ecuación diferencial de segundo orden

estudio.

Recuérdese que tanto los sumadores como los integradores cambian de signo la señal de entrada, por lo que será necesario invertir el signo de la primera derivada mediante un sumador de una sola entrada antes de realimentar esta señal al sumador inicial.

Por otra parte es necesario establecer las condiciones iniciales de los integradores, lo que se logra mediante la tensión de referencia del computador (± 10 V), atenuada convenientemente con los potenciómetros adecuados.

6 FACTORES DE ESCALA

6.1 Escalado de la variable dependiente

Para obtener resultados satisfactorios de un computador analógico, es necesario tener en cuenta la relación que liga las tensiones de los amplificadores con las variables dependientes y sus derivadas. Ello se debe a la limitación de las tensiones que utiliza el computador analógico.

En efecto, un amplificador tiene un rango sobre el cual la tensión de salida es proporcional a la tensión de entrada (como se ha indicado, normalmente ± 10 V). Sin embargo, si la tensión de entrada excede de este rango lineal, el amplificador se satura y la salida deja de ser proporcional a la entrada.

Por otro lado, es normal que una señal vaya acompañada de un ruido aleatorio, por lo que, si las señales de entrada son muy pequeñas, su magnitud puede ser comparable con la magnitud del ruido, viéndose perturbada la salida por este ruido.

Por todo ello se procede al escalado de la variable dependiente, mediante el método que se desarrolla a continuación, utilizando como ejemplo la ecuación diferencial de segundo orden ya considerada anteriormente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + b x = f(t) \quad [21]$$

Si se conoce de antemano, por estimación o experiencia, que el máximo valor de x de la solución es x_m , se puede determinar un factor de escala, k_o , de la forma:

$$k_o = \frac{10}{x_m}$$

[22]

teniendo en cuenta que la tensión máxima del computador es de 10 V. Se representa entonces la tensión de salida del amplificador, correspondiente a x , de la forma $[k_o x]$.

Mediante esta técnica se optimiza el rango de tensión disponible y se asegura que el amplificador no se sature durante la resolución de la ecuación. En la práctica, se suele redondear k_o a un valor algo más pequeño que $10/x_m$ si con ello se obtiene un factor de escala más cómodo de manejar.

Para obtener los factores de escala para las derivadas de la variable dependiente, asimismo se ha de disponer de la estimación de los valores máximos de estas variables, siendo dichos factores:

$$k_1 = \frac{10}{\dot{x}_m} \quad [23]$$

$$k_2 = \frac{10}{\ddot{x}_m} \quad [24]$$

Despejando la segunda derivada de la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} = -a \dot{x} - b x + f(t) \quad [25]$$

se puede escribir ahora en términos de tensiones en los amplificadores, teniendo en cuenta los factores de escala:

$$\frac{[k_2 \ddot{x}]}{k_2} = -a \frac{[k_1 \dot{x}]}{k_1} - b \frac{[k_o x]}{k_o} + f(t) \quad [26]$$

o bien:

$$[k_2 \ddot{x}] = -a \frac{k_2}{k_1} [k_1 \dot{x}] - b \frac{k_2}{k_o} [k_o x] + k_2 f(t) \quad [27]$$

El circuito correspondiente a la solución de la ecuación diferencial será ahora el mostrado en la [Figura 11](#), circuito análogo al de la [Figura 10](#), con los potenciómetros colocados a la entrada de los integradores con los valores adecuados ($k_{salida}/k_{entrada}$) para poder obtener las salidas deseadas. Asimismo es evidente el cálculo de los potenciómetros que

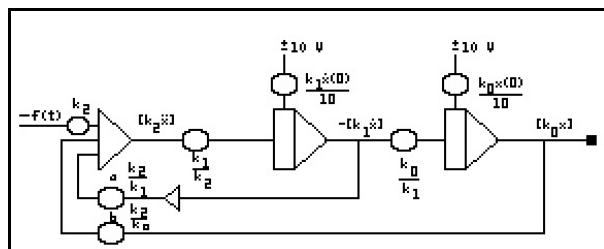


Figura 11 Escalado de la variable dependiente

permiten establecer las condiciones iniciales de los integradores.

6.2 Escalado del tiempo

Para la resolución de algunos problemas mediante el computador analógico es necesario el escalado del tiempo, que hace posible acelerar o retardar el problema en el computador. Recuérdese que el computador analógico integra con respecto al tiempo medido en el mismo, es decir, los segundos transcurridos desde el inicio de la integración.

La necesidad de escalado en el tiempo es evidente en dos aspectos extremos. Por un lado, si el tiempo necesario para resolver un problema es muy largo, ello implica un gran tiempo de utilización del computador, lo que indica la necesidad de acelerar la solución. Por el contrario, si la solución es muy rápida, la respuesta del registrador puede ser demasiado lenta, y no se obtiene un registro fiel de la señal de salida del computador. Se hace necesario, pues, en este caso, retardar la solución.

El factor de escalado del tiempo, β , se define, pues, como la relación entre el tiempo del computador, τ , y la variable independiente del problema, t :

$$\beta = \frac{\tau}{t} \quad [28]$$

Así pues, si se pone la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + b x = f(t) \quad [29]$$

en función de la nueva variable independiente:

$$\tau = \beta t \quad [30]$$

los distintos términos quedarían de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\left[\frac{\tau}{\beta}\right]} = \beta \frac{dx}{d\tau} \quad [31]$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \beta^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} \quad [32]$$

con lo cual, la ecuación diferencial quedará ahora de la forma:

$$\beta^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} = -a \beta \frac{dx}{d\tau} - b x + f\left(\frac{\tau}{\beta}\right) \quad [33]$$

Al cambiar la escala de tiempos, las tensiones de salida de los elementos del computador vendrán dadas en esta escala de tiempos, por lo que se puede poner la ecuación diferencial en función de las tensiones de la forma:

$$\left[\beta^2 \ddot{x}_\tau\right] = -a \left[\beta \dot{x}_\tau\right] - b \left[x_\tau\right] + f\left(\frac{\tau}{\beta}\right) \quad [34]$$

y el circuito del computador tendrá la forma de la [Figura 12](#), siendo x_τ la variable dependiente del tiempo del computador.

Al igual que se hacía con el escalado de la variable dependiente, es necesario introducir los potenciómetros a la entrada de los integradores, con objeto de obtener las señales de salida adecuadas.

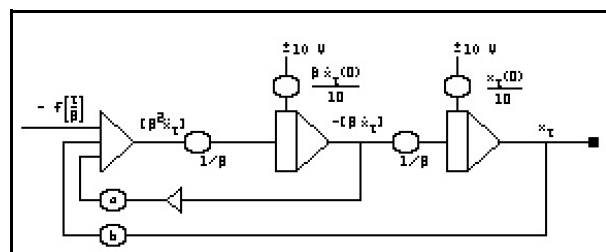


Figura 12 Escalado del tiempo

6.3 Escalado conjunto

AUTOMATICA

Como es fácil deducir, la ecuación diferencial de segundo orden que representa el escalado de la variable dependiente y el del tiempo, tendrá la forma:

$$\left[\beta^2 k_2 \ddot{x}_t \right] = - a \frac{k_2}{k_1} \left[\beta k_1 \dot{x}_t \right] - b \frac{k_2}{k_o} \left[k_o x_t \right] + k_2 f(t) \quad [35]$$

Sin embargo, a menudo es posible escoger el factor de escala en el tiempo de tal forma, que todas las constantes de tiempo en los integradores sean del orden de 1 s. Para conseguirlo será necesario ajustar el factor de escala para que los coeficientes de cada una de las derivadas tengan la misma magnitud.

El procedimiento general consiste en definir el factor de escalado del tiempo de la forma:

$$\beta = 10^{n/m} \quad [36]$$

siendo:

n: número de órdenes de magnitud en el que difieren el coeficiente del término de orden más bajo y el coeficiente del término de orden más alto

m: número de órdenes en que difieren la derivada de más alto orden y la de más bajo orden en la ecuación diferencial

Con ésto, si los coeficientes de todas las derivadas pueden hacerse del mismo orden de magnitud mediante un factor de escala en el tiempo, el escalado en la variable dependiente tendrá que hacerse sólo sobre ésta y no sobre sus derivadas, ya que todas las derivadas serán del mismo orden de magnitud que la variable dependiente.

7 SIMULACION DE SISTEMAS DE CONTROL

Como se ha visto hasta ahora, el computador analógico tiene una gran aplicación en la resolución de ecuaciones diferenciales, lo que permitirá su uso para el estudio del comportamiento transitorio de los sistemas de control. La simulación de estos sistema implica la resolución simultánea de las ecuaciones diferenciales que

representan las características dinámicas de los componentes del sistema, con objeto de obtener unas tensiones de salida variables en el tiempo que reflejan el comportamiento transitorio del sistema real. En este sentido, la simulación no es otra cosa que la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas.

Para representar sistemas lineales se utilizan generalmente diagramas de bloques y funciones de transferencia, lo que implicará el desarrollo de circuitos para simular las funciones de transferencia más normalmente utilizadas, para luego conectar los circuitos apropiados de acuerdo con el diagrama de bloques. Esta aproximación se denomina "simulación directa de sistemas de control" y ofrece la ventaja de permitir cablear un circuito directamente a partir del diagrama de bloques. Este procedimiento ayuda a organizar el trabajo y ofrece una visión considerable de la interacción entre los componentes del sistema de control.

Así pues, el procedimiento usual para determinar la respuesta transitoria de un sistema de control lineal es construir un diagrama de bloques del sistema y situar dentro de cada bloque la función de transferencia apropiada. A partir del diagrama de bloques se obtiene la función de transferencia global, que puede ser usada para determinar la respuesta del sistema para cada variación en la carga o en el punto de consigna.

Se verá a continuación cómo se puede utilizar el computador analógico para simular un sistema de control, directamente a partir de las funciones de transferencia.

7.1 Simulación de un sistema de primer orden

Una función de transferencia de primer orden, equivalente al bloque mostrado en la [Figura 13](#), tiene la forma:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad [37]$$

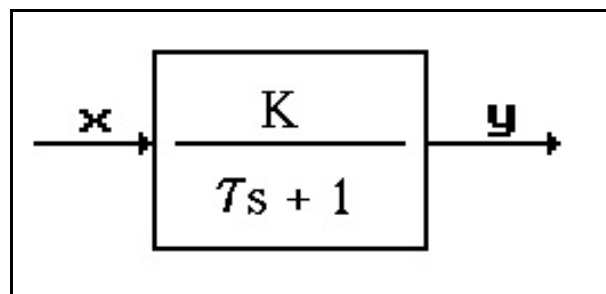


Figura 13 Función de transferencia de primer orden

Despejando la señal de salida:

$$\tau s Y(s) + Y(s) = K X(s) \quad [38]$$

o, lo que es lo mismo:

$$-s Y(s) = \frac{1}{\tau} Y(s) - \frac{K}{\tau} X(s) \quad [39]$$

ecuación lineal que es equivalente a la ecuación diferencial:

$$- \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tau} y - \frac{K}{\tau} x \quad [40]$$

A esta ecuación diferencial le corresponde el circuito analógico mostrado en la [Figura 14](#), o bien, combinando el sumador y el integrador en un solo elemento, el de la [Figura 15](#).

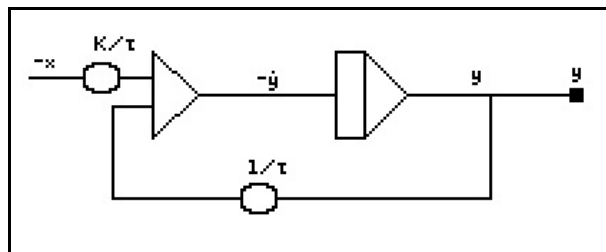


Figura 14 Circuito analógico para un sistema de primer orden

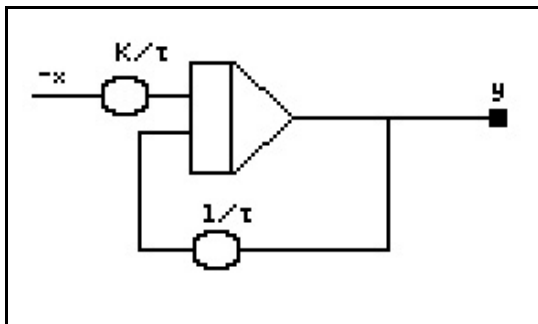


Figura 15 Circuito analógico para un sistema de primer orden (simplificado)

Obsérvese en ambos casos que la tensión inicial al integrador es cero, ya que la función de transferencia se obtiene para condiciones iniciales nulas.

7.2 Simulación de un sistema de segundo orden

AUTOMATICA

Si el sistema de segundo orden es sobreamortiguado, es decir, $\gamma > 1$, la función de transferencia se puede poner de la forma:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad [41]$$

ecuación que puede ser simulada conectando en serie dos circuitos equivalentes a sistemas de primer orden.

Ahora bien, si el sistema es subamortiguado, es decir, $\gamma < 1$, correspondiente al bloque mostrado en la [Figura 16](#), la función de transferencia será del tipo:

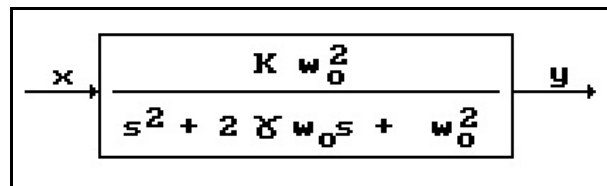


Figura 16 Función de transferencia de segundo orden

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K \omega_0^2}{s^2 + 2\gamma\omega_0 s + \omega_0^2} \quad [42]$$

La ecuación diferencial correspondiente se obtiene despejando $Y(s)$:

$$s^2 Y(s) + 2\gamma\omega_0 s Y(s) + \omega_0^2 Y(s) = K \omega_0^2 X(s) \quad [43]$$

es decir:

$$-s^2 Y(s) = 2\gamma\omega_0^2 s Y(s) + \omega_0^2 Y(s) - K \omega_0^2 X(s) \quad [44]$$

Expresión equivalente a la ecuación diferencial:

$$-\frac{d^2 y}{dt^2} = 2\gamma\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y + K \omega_0^2 x \quad [45]$$

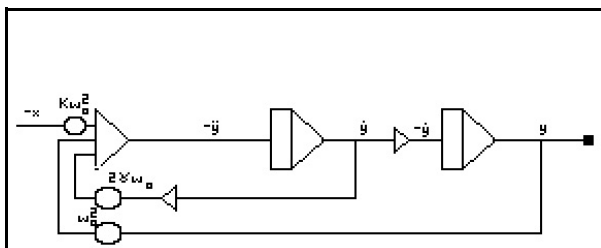


Figura 17 Circuito analógico para un sistema de segundo orden

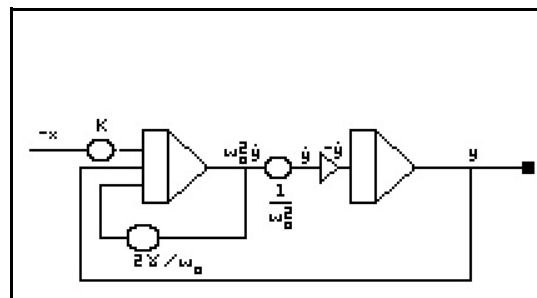


Figura 18 Circuito analógico para un sistema de segundo orden (simplificado)

Esta ecuación diferencial se resuelve con el circuito de la [Figura 17](#), cuyas condiciones iniciales de los integradores son nulas, por la definición de función de transferencia, o bien, combinando el sumador y el primer integrador en un solo elemento, y teniendo en cuenta que todas las entradas tienen como factor común el término $1/\omega_0^2$, con el circuito de la [Figura 18](#).

7.3 Simulación de un controlador " P "

El controlador proporcional tiene la función de transferencia:

$$\frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = K_c \quad [46]$$

equivalente al bloque mostrado en la [Figura 19](#).

Operando:

$$P(s) = K_c \varepsilon(s) \quad [47]$$

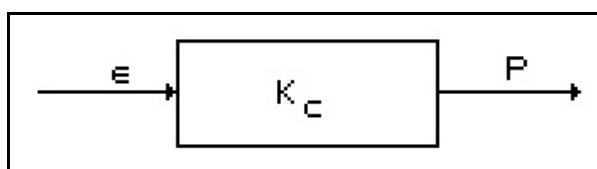


Figura 19 Función de transferencia de un controlador "P"

expresión equivalente a la ecuación diferencial de orden cero:

$$P = K_c \varepsilon \quad [48]$$

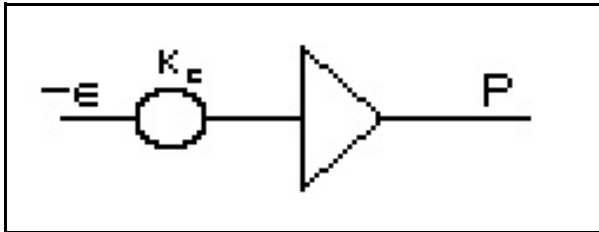


Figura 20 Circuito analógico para un controlador "P"

lo que permite establecer el circuito mostrado en la [Figura 20](#).

7.4 Simulación de un controlador "PI"

La función de transferencia de un bloque controlador proporcional-integral como el mostrado en la [Figura 21](#) será:

$$\frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \quad [49]$$

Operando en esta ecuación:

$$\frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{K_c \tau_I s + 1}{\tau_I s} \quad [50]$$

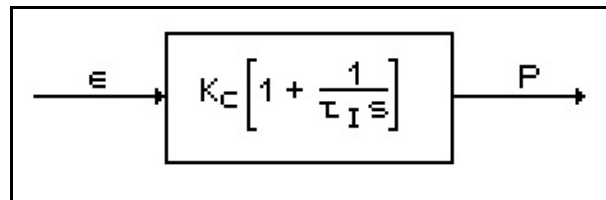


Figura 21 Función de transferencia de un controlador "PI"

$$s P(s) = K_c s \varepsilon(s) + \frac{K_c}{\tau_I} \varepsilon(s) \quad [51]$$

Expresión equivalente a la ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = K \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{K_c}{\tau_I} \varepsilon \quad [52]$$

Integrando para condiciones iniciales nulas:

$$P = K_c \varepsilon + \frac{K_c}{\tau_I} \int_0^t \varepsilon dt \quad [53]$$

se podrá establecer el circuito mostrado en la [Figura 22](#) para la resolución de esta ecuación.

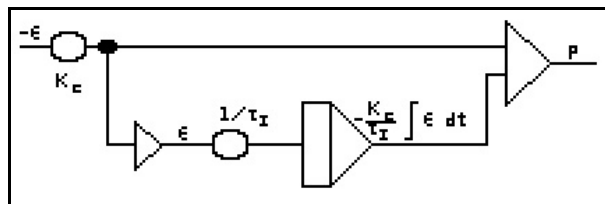


Figura 22 Circuito analógico para un controlador "PI"

7.5 Simulación de un controlador "PD"

El bloque proporcional-diferencial ideal mostrado en la [Figura 23](#) tiene la función de transferencia:

$$\frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = K_c (1 + \tau_D s) \quad [54]$$

Expresión equivalente a la ecuación diferencial:

$$P = K_c \varepsilon + K_c \tau_D \frac{d\varepsilon}{dt} \quad [55]$$

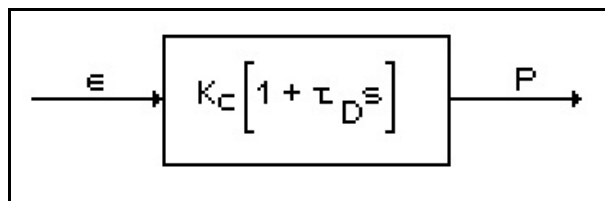


Figura 23 Función de transferencia para un controlador "PD"

Sin embargo, como es sabido, esta función de transferencia no puede ser llevada a cabo en un controlador real, y tampoco puede ser simulada en un computador analógico, debido a que éste sólo integra, no deriva. Por ello, se suele utilizar la función de transferencia real para un controlador PD de la forma:

$$\frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = K_c \frac{\tau_D s + 1}{\frac{\tau_D}{\alpha} s + 1} \quad [56]$$

donde α es una constante, que en muchos controladores tiene un valor de alrededor de 10. Cuánto más alto sea el valor de α, más se asemeja el controlador real al ideal.

Operando se obtiene:

$$\frac{\tau_D}{\alpha} s P(s) + P(s) = K_c \tau_D s \varepsilon(s) + K_c \varepsilon(s) \quad [57]$$

Expresión equivalente a la ecuación diferencial:

$$\frac{\tau_D}{\alpha} \frac{dP}{dt} + P = K_c \tau_D \frac{d\varepsilon}{dt} + K_c \varepsilon \quad [58]$$

Integrando y reordenando términos:

$$P = \frac{\alpha}{\tau_D} \int_0^t P dt + \frac{K_c \alpha}{\tau_D} \int_0^t \varepsilon dt \quad [59]$$

Ecuación que da lugar al circuito mostrado en la [Figura 24](#), de resolución de la ecuación diferencial.

Obsérvese que cómo $\alpha \approx 10$, no se han utilizado potenciómetros para fijar su valor, habiéndose introducido en el sumador por las conexiones de ganancias 10.

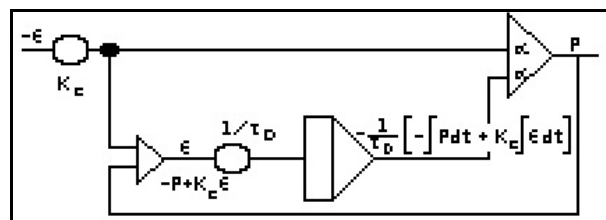


Figura 24 Circuito analógico para un controlador "PD"

7.6 Simulación de un controlador "PID "

El bloque de un controlador proporcional-integral-diferencial ideal es del tipo del mostrado en la [Figura 25](#).

Sin embargo, según las consideraciones hechas al estudiar el controlador PD, la función de transferencia de un controlador PID real será:

$$\frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = K_c \left[\frac{\tau_D s + 1}{\frac{\tau_D}{\alpha} s + 1} + \frac{1}{\tau_I s} \right] \quad [60]$$

Como esta ecuación es la suma de un PI y un PD, la forma más fácil de obtener el circuito que simula la ecuación diferencial correspondiente será combinar los circuitos PI y PD de la forma mostrada en la [Figura 26](#).

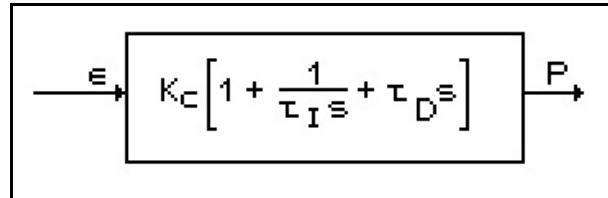


Figura 25 Función de transferencia del controlador "PID"

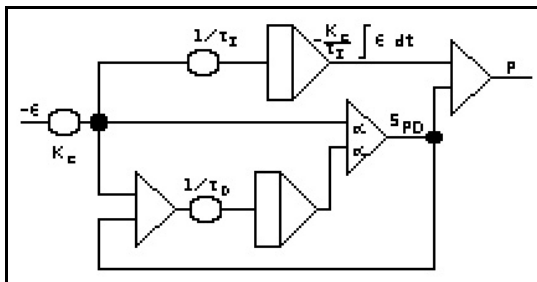


Figura 26 Circuito analógico para un controlador "PID"

REPRESENTACION DE SISTEMAS DINAMICOS CONTINUOS MEDIANTE VARIABLES DE ESTADO

1 INTRODUCCION.....	1
2 REPRESENTACION MATRICIAL DE UN SISTEMA: ECUACIONES DE ESTADO Y DE SALIDA.	2
2.1 Simplificación para sistemas SISO.	5
3 RELACION ENTRE ECUACIONES DE ESTADO Y FUNCIONES DE TRANSFERENCIA.....	8
4 RESOLUCION DE LA ECUACION DE ESTADO.	12
4.1 Solución en el dominio del tiempo.....	12
4.1.1 Bases matemáticas.	12
4.1.2 Aplicación a la ecuación matricial.	14
4.1.3 Matriz de transición de estados.	15
4.1.4 Propiedades de la matriz de transición de estados.	16
4.1.5 Resolución de la ecuación no homogénea.	18
4.2 Aplicación de la transformada de Laplace.....	19
4.3 Ecuación de salida.....	20
5 ESTUDIO DE LA ECUACION CARACTERISTICA.....	20
5.1 Autovalores.	21
5.2 Autovectores.	21
5.3 Diagonalización de una matriz: forma canónica.	22
5.3.1 Utilización de la matriz de Vandermonde.....	24
5.4 Diagonalización de una matriz: forma canónica de Jordan.	24

1 INTRODUCCION

La teoría clásica del control considera un sistema con una única señal de entrada y una única señal de salida (sistemas Single Input Single Output), relacionadas ambas por la función de transferencia. Esto no deja de ser una simplificación de la realidad, ya que para cualquier fenómeno físico es necesario considerar, de forma rigurosa, la existencia de múltiples señales de entrada y de salida (sistemas Multiple Input Multiple Output).

La aproximación más reciente a la dinámica de sistemas complejos es considerar el comportamiento del "estado" del sistema, en vez de considerar solamente las salidas particulares del sistema. El estado de un sistema se determina mediante todas sus "variables de estado", conjunto mínimo de variables que contiene la información suficiente para poder determinar todos los estados futuros del sistema. Además será necesario conocer las ecuaciones que relacionan las variables de estado ("vector de estado") y también las entradas futuras al sistema ("vector de entrada"), para determinar su comportamiento.

Definidas de esta forma las variables de estado, los efectos de todas las entradas previas se encontrarán combinadas intrínsecamente en sus valores, y para determinar éstos a un tiempo t después de un cierto valor t_0 , sólo será necesario conocer sus valores a t_0 y no su historia previa. El número mínimo de variables requeridas para definir el estado es el "orden" del sistema, n , pudiéndose hablar de un "espacio de estado de orden n " en el cual las trayectorias vienen trazadas por las variables de estado al aumentar el tiempo.

Para elegir las variables de estado es conveniente elegir variables de significado físico directo cuando ello sea posible y, en particular, aquéllas que puedan ser directamente observadas y medidas, ya que así resulta más fácil su uso en la construcción de las leyes de control y su aplicación. Sin embargo, ésto a veces es muy difícil, es decir, la salida real del proceso no suele ser idéntica al "estado elegido" para el mismo. Por ello se necesita asimismo una relación entre las variables de estado y las variables de salida. Ello significa que, aunque el número de variables de estado independientes que se requieren para describir adecuadamente un sistema es fijo, la

elección de las variables de estado no es única.

Como el problema se limita a la consideración de unas relaciones entre entradas, salidas y variables de estado del sistema, se necesitarán un cierto número de ecuaciones simultáneas. Como una ecuación diferencial de orden n puede ser reducida a n ecuaciones diferenciales de primer orden, definiendo adecuadamente las variables de estado, se podrá representar el comportamiento general de un sistema mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden. Este puede contener ecuaciones no lineales, pero ello no es problema si se utiliza la notación matricial.

2 REPRESENTACION MATRICIAL DE UN SISTEMA: ECUACIONES DE ESTADO Y DE SALIDA

La ecuación de estado de un sistema de múltiples entradas y salidas es una ecuación diferencial de primer orden que representa la derivada de una variable de estado (x_i) en función de todas las variables de estado (x_n) y todas las entradas al sistema (u_m), es decir:

$$\dot{x}_i(t) = f_i \left[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t) \right] \quad [1]$$

Así, para todas las variables de estado, se puede usar la función vectorial f , con lo cual queda la ecuación vectorial:

$$\dot{x}(t) = f \left[x(t), u(t) \right] \quad [2]$$

Si los parámetros del sistema varían con el tiempo, f contendrá funciones explícitas del tiempo. Se considerará en lo sucesivo, sin embargo, que los sistemas son lineales invariantes en el tiempo, con lo cual f_i será una función lineal de x_i y u_i , cuyos coeficientes son constantes, es decir:

AUTOMATICA

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + b_{i1}u_1 + \\ &+ b_{i2}u_2 + \dots + b_{im}u_m = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^m b_{ij}u_j \end{aligned} \quad [3]$$

Si se escriben las ecuaciones de esta forma para todas las variables de estado, se obtiene, en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{pmatrix} \quad [4]$$

$(nx1) \quad (nxn) \quad (nx1) \quad (n \times m) \quad (m \times 1)$

o bien en forma vectorial:

$$\dot{x} = A x + B U \quad [5]$$

donde x es el "vector de estado", u es el "vector de entrada" y A y B son matrices constantes para sistemas invariantes en el tiempo.

Ahora bien, las variables de salida (y_i) no tienen que ser idénticas a las variables de estado (x_i), pero serán combinaciones lineales de ellas, si las variables de estado están correctamente elegidas, y de las variables de entrada (u_i), es decir:

$$y_j(t) = f_j [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)] \quad [6]$$

o bien, para todas las variables de salida, en notación vectorial:

$$y(t) = g [x(t), u(t)] \quad [7]$$

Para sistemas lineales invariantes en el tiempo:

$$y_j = c_{j1}x_1 + c_{j2}x_2 + \dots + c_{jn}x_n + d_{j1}u_1 + d_{j2}u_2 + \dots + d_{jm}u_m = \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k + \sum_{k=1}^m b_{jk}u_k \quad [8]$$

Si se escriben las ecuaciones de esta forma para todas las variables de salida (y_p) se obtiene, en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{pmatrix} \quad [9]$$

$(p \times 1)$ $(p \times n)$ $(n \times 1)$ $(p \times m)$ $(m \times 1)$

o bien, en forma vectorial:

$$y = C x + D u \quad [10]$$

donde y es el "vector de salida" y C y D son matrices constantes para sistemas invariantes en el tiempo.

En resumen, para un sistema lineal invariante en el tiempo, las ecuaciones dinámicas que lo definen serán, en forma vectorial:

$$\text{Ecuación de estado : } \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad [11]$$

$$\text{Ecuación de salida : } y(t) = C x(t) + D u(t) \quad [12]$$

Obsérvese finalmente que un sistema dinámico queda perfectamente definido respecto a las variables de estado mediante la ecuación de estado. El único objeto que tiene la ecuación de salida es relacionar las variables de estado (muchas veces no medibles) con las variables de salida del sistema, o variables físicas medibles.

2.1 Simplificación para sistemas SISO

Considérese un sistema con una sola variable de entrada, $u(t)$, una sola variable de salida, $y(t)$, lineal, invariante en el tiempo y que viene representado por una ecuación diferencial de orden n :

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = u(t) \quad [13]$$

Se trata de representar esta ecuación por n ecuaciones de estado y una ecuación de salida, lo que se puede hacer simplemente definiendo las n variables de estado en términos de la salida $y(t)$ y de sus derivadas. Como el conjunto de variables de estado de un sistema no es único, se puede buscar el camino más conveniente para asignar las variables de estado, mientras se siga cumpliendo la definición de éstas.

En este caso resulta adecuado definir las variables de estado de la forma:

AUTOMATICA

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t) \\x_2(t) &= \frac{dy(t)}{dt} \\x_3(t) &= \frac{d^2y(t)}{dt^2} \\&\cdot \\&\cdot \\&\cdot \\&\cdot \\x_n(t) &= \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}\end{aligned}\tag{14}$$

con lo que las ecuaciones de estado quedan de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_3(t) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \frac{dx_{n-1}(t)}{dt} &= x_n(t) \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= -a_1x_1(t) - a_2x_2(t) - \dots - a_{n-1}x_{n-1}(t) - a_nx_n(t) + u(t)\end{aligned}\tag{15}$$

donde la última ecuación se obtiene igualando la derivada de más alto orden al resto de la ecuación diferencial, [\[13\]](#).

La ecuación de salida es, simplemente:

AUTOMATICA

$$y(t) = x_1(t) \quad [16]$$

ya que hay una sola salida.

Las ecuaciones de estado en forma matricial quedan ahora:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} u \quad [17]$$

$(nx1) \qquad (nxn) \qquad (nx1) \quad (nx1) \quad (1x1)$

Expresión que se conoce con el nombre de "forma canónica de variables físicas", denominándose "variables físicas" la de la salida del sistema y sus sucesivas derivadas.

La ecuación de salida queda, en forma matricial:

$$y = \underset{(1 \times 1)}{[1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]} \underset{(1 \times n)}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}} \underset{(n \times 1)}{\quad} \quad [18]$$

En definitiva, las ecuaciones que describen el estado de un sistema SISO serán:

$$\text{Ecuación de estado: } \dot{x}(t) = A x(t) + b u(t) \quad [19]$$

$$\text{Ecuación de salida: } y(t) = c x(t) \quad [20]$$

Obsérvese que, en este caso, b y c son magnitudes escalares, ya que tanto la entrada, u(t), como la salida, y(t) también lo son, al ser únicas.

3 RELACION ENTRE ECUACIONES DE ESTADO Y FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

Como es sabido, la función de transferencia de un sistema lineal de una sola variable se define en términos de los coeficientes de la ecuación diferencial del sistema:

$$\begin{aligned} & \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) = \\ & = b_{m+1} \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_m \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_2 \frac{du(t)}{dt} + b_1 u(t) \end{aligned} \quad [21]$$

como:

AUTOMATICA

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{m-1}s^{m-1} + b_m s^{m-1} + \dots + b_2 s + b_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1} \quad [22]$$

Por tanto, un sistema multivariable, lineal, invariante en el tiempo que tiene m entradas y p salidas, tendrá una matriz de funciones de transferencia de la forma:

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2m}(s) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ G_{p1}(s) & G_{p2}(s) & \dots & G_{pm}(s) \end{pmatrix} \quad [23]$$

Las ecuaciones dinámicas que describen a este sistema serán:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad [24]$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad [25]$$

siendo, por tanto:

$x(t)$ = vector de estado $n \times 1$

$u(t)$ = vector de entrada $m \times 1$

$y(t)$ = vector de salida $p \times 1$

Tomando transformadas de Laplace en ambas ecuaciones para condiciones iniciales nulas, se obtiene:

$$s X(s) = A X(s) + B U(s) \quad [26]$$

AUTOMATICA

$$Y(s) = C X(s) + D U (s) \quad [27]$$

Agrupando términos en la ecuación [26]:

$$(s I - A) X(s) = B U (s) \quad [28]$$

donde se ha introducido la matriz identidad (matriz unitaria), I, para dar al primer sumando el mismo carácter matricial que tiene A, es decir, si A es una matriz n x n, I será:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n,n} \quad [29]$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación [28] por la matriz inversa $(sI - A)^{-1}$ y sustituyendo en la ecuación [27] se obtendrá:

$$Y(s) = C (sI - A)^{-1} B U(s) + D U(s) \quad [30]$$

o bien:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C (sI - A)^{-1} B + D \quad [31]$$

Ahora bien, la teoría de matrices permite demostrar que la inversa de una matriz

AUTOMATICA

es igual a su adjunta dividida por el determinante de la matriz, es decir:

$$M^{-1} = \frac{adj M}{|M|} \quad [32]$$

definiéndose la matriz adjunta de la forma:

$$adj M = [cofactor\ ij\ de\ |M|]^T \quad [33]$$

donde el cofactor del determinante de M es el determinante obtenido omitiendo la fila i y la columna j del determinante de M y multiplicándolo luego por $(-1)^{i+j}$; la notación $[\]^T$ indica que se trata de la matriz traspuesta (resultado de cambiar filas por columnas).

Así, la ecuación [31] se puede escribir también de la forma:

$$G(s) = C \frac{adj (sI - A)}{|sI - A|} B + D \quad [34]$$

que es una matriz $p \times m$, y cuya existencia requiere que la matriz $(sI - A)$ no sea singular, es decir, que su determinante no sea nulo.

Si el sistema tiene una sola variable de entrada y una sola de salida, se cumplirá que $D = 0$, por lo que la ecuación [34] se simplifica a:

$$G(s) = C \frac{adj (sI - A)}{|sI - A|} B \quad [35]$$

Al determinante de la ecuación [35] igualado a cero se le denomina "ecuación característica" del sistema, y juega un papel muy importante en el estudio de los sistemas dinámicos lineales. Por ello será tratada esta ecuación con mayor detenimiento más adelante.

4 RESOLUCION DE LA ECUACION DE ESTADO

La resolución de la ecuación de estado implica obtener la solución $x(t)$ para la ecuación diferencial de primer orden (ecuación de estado):

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad [36]$$

Si existe otra relación adicional, como puede ser la ecuación de salida:

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad [37]$$

se puede obtener $y(t)$ directamente a partir de $x(t)$, si C y D son matrices constantes.

Existen dos métodos para resolver la ecuación de estado: solución en el dominio del tiempo y aplicación de la transformada de Laplace.

4.1 Solución en el dominio del tiempo

4.1.1 Bases matemáticas

Para abordar la resolución de la ecuación de estado en el dominio del tiempo, se considera previamente la resolución de la ecuación diferencial escalar, lineal, de primer orden, de la forma:

$$\dot{x} = a x + b u \quad [38]$$

Para ello se tiene en cuenta primero la ecuación homogénea correspondiente:

$$\dot{x} = a x \quad [39]$$

que permite obtener una solución general, y luego se considera el término forzante, $b.u$, para obtener también la solución particular.

La solución de la ecuación lineal homogénea [39] permitirá elegir una solución probable para luego comprobar que ésta solución cumple la ecuación original.

AUTOMATICA

La solución de la ecuación homogénea es inmediata:

$$x = e^{at} x(0) \quad [40]$$

donde $x(0)$ es la condición inicial para $t = 0$.

Teniendo en cuenta el desarrollo en serie:

$$e^{at} = 1 + a t + \frac{(a t)^2}{2!} + \frac{(a t)^3}{3!} + \dots \quad [41]$$

se puede observar que se ha supuesto una solución de la forma general:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots \quad [42]$$

La solución de la ecuación no homogénea se obtiene multiplicando ésta por la solución de la homogénea:

$$x(0) e^{-at} (\dot{x} - a x) = x(0) e^{-at} b u \quad [43]$$

o, lo que es lo mismo:

$$\frac{d}{dt} [x e^{-at}] = e^{-at} b u \quad [44]$$

Integrando entre 0 y t :

$$x e^{-at} - x(0) e^{-a0} = \int_0^t e^{-at} b u dt \quad [45]$$

Reordenando:

$$x(t) = x(0) e^{at} + e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} b u d\tau \quad [46]$$

Obsérvese que se está intentando buscar una ecuación general para cualquier valor del tiempo, no para un valor determinado, t_0 . Por ello, las variables incluídas en la integral, como dependen, a su vez, del tiempo, hay que integrarlas de forma convencional, y al hacer la integral definida, hay que sustituirlas por los valores 0 y t. Para evitar posibles confusiones se suele considerar que las variables de la integral dependen de una "variable muerta", τ , (que seguiría siendo el tiempo), se integra la expresión y se sustituyen los límites por los valores 0 y t, es decir, se pone la ecuación anterior de la forma:

$$x(t) = x(0) e^{at} + e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} b u (\tau) d\tau \quad [47]$$

4.1.2 Aplicación a la ecuación matricial

Si se aplica lo desarrollado anteriormente a la ecuación matricial, considerando de forma análoga en primer lugar la ecuación homogénea:

$$\dot{x} = A x \quad [48]$$

y suponiendo una solución (siendo A invariante en el tiempo) de la forma:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots \quad [49]$$

la sustitución de esta solución en la ecuación homogénea permite obtener:

$$a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots + k a_k t^{k-1} + \dots = A (a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k + \dots) \quad [50]$$

Identificando los coeficientes de las potencias de t se obtiene, considerando que $x = x(0)$ para $t = 0$:

$$\begin{aligned} a_0 &= x(0) \\ a_1 &= A a_0 \\ a_2 &= \frac{1}{2} A^2 a_0 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ a_k &= \frac{1}{k!} A^k a_0 \end{aligned} \tag{51}$$

con lo cual, la solución [49] puede ser escrita de la forma:

$$x(t) = \left[I + A t + \frac{A^2}{2!} t^2 + \dots + \frac{A^k}{k!} t^k + \dots \right] x(0) \tag{52}$$

donde se ha introducido la matriz identidad, I, para conservar el carácter matricial de la ecuación.

4.1.3 Matriz de transición de estados

Comparando el resultado obtenido en [52] con el desarrollo en serie [41] realizado para un escalar, se puede identificar el contenido del corchete con una matriz exponencial $m \times n$ del tipo e^{At} , con lo que la solución de la ecuación homogénea será:

$$x(t) = e^{at} x(0) \tag{53}$$

AUTOMATICA

Esta importante matriz exponencial se conoce como la "matriz de transición de estados", $\varphi(t)$, es decir:

$$\varphi(t) = e^{At} = I + A t + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots \quad [54]$$

que, por definición, es aquella que satisface la ecuación de estado homogénea y físicamente representa la "respuesta libre" del sistema, es decir, gobierna la respuesta que se produce sólo debido a las condiciones iniciales del sistema. Como su nombre indica, la matriz de transición de estados define completamente la transición de los estados desde el instante inicial $t = 0$ hasta un tiempo t , cuando las entradas al sistema son nulas.

4.1.4 Propiedades de la matriz de transición de estados

De acuerdo con la naturaleza exponencial de la matriz de transición de estados, se pueden deducir las siguientes propiedades para la misma:

$$a) \quad \varphi(0) = I \quad [55]$$

$$b) \quad \varphi^{-1}(t) = \varphi(-t) \quad [56]$$

$$c) \quad [\varphi(t)]^k = \varphi(kt) \quad (k = \text{entero}) \quad [57]$$

$$d) \quad \varphi(t_1 + t_2) = \varphi(t_2) \varphi(t_1) \quad [58]$$

$$e) \quad \varphi(t_2 - t_0) = \varphi(t_1 - t_0) \varphi(t_2 - t_1) \quad \langle \text{para cualquier } t_0, t_1, t_2 \rangle \quad [59]$$

La última propiedad es de gran importancia, ya que implica que un proceso de transición de estados puede ser dividido en un número finito de transiciones secuenciales, tal como muestra la [Figura 1](#).

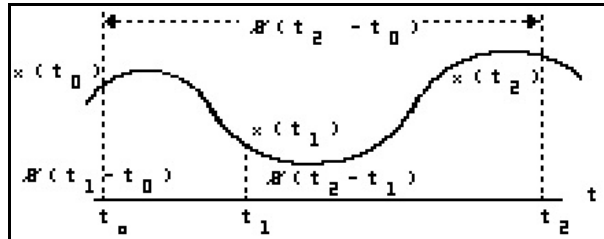


Figura 1 Transiciones secuenciales de una transición de estados

4.1.5 Resolución de la ecuación no homogénea

Al igual que se hizo en el [apartado 4.1.1](#), reordenando la ecuación de estado de la forma:

$$\dot{x} - A x = B u \quad [60]$$

multiplicando por la solución de la ecuación homogénea e integrando se obtendrá:

$$x(t) = x(0) e^{At} + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau \quad [61]$$

o, lo que es lo mismo:

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad [62]$$

$$x(t) = \varphi(t) x(0) + \int_0^t \varphi(t-\tau) B u(\tau) d\tau \quad [63]$$

ecuación que representa la solución de la ecuación de estado, también llamada "ecuación de transición de estados".

4.2 Aplicación de la transformada de Laplace

Si a la ecuación de estado:

$$\dot{x} = A x(t) + B u(t) \quad [64]$$

se le aplica la transformada de Laplace:

$$s X(s) - x(0) = A X(s) + B U(s) \quad [65]$$

Despejando $X(s)$ queda, introduciendo la matriz identidad, I , para conservar el carácter matricial de la ecuación:

$$X(s) = (s I - A)^{-1} x(0) + (s I - A)^{-1} B U(s) \quad [66]$$

de donde la ecuación de transición de estados se obtendrá aplicando la transformada inversa de Laplace:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[(s I - A)^{-1} x(0) \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[(s I - A)^{-1} B u(s) \right] \quad [67]$$

Como se puede demostrar fácilmente aplicando la transformada de Laplace a la resolución de la ecuación homogénea, el primer sumando de la expresión [\[67\]](#) es la solución de ésta, lo que permite definir también la matriz de transición de estados de la forma:

$$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[(s I - A)^{-1} \right] \quad [68]$$

Por su parte, el segundo sumando de la expresión [\[67\]](#) puede obtenerse aplicando la transformada de Laplace a la integral de convolución:

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right] = F_1(s) F_2(s) \quad [69]$$

Todo ello lleva a que la ecuación de transición de estados quede de la forma:

$$x(t) = \varphi(t) x(0) + \int_0^t \varphi(t-\tau) B u(\tau) d\tau \quad [70]$$

expresión completamente idéntica a la [65].

4.3 Ecuación de salida

Una vez determinada la ecuación de transición de estados, el vector de salida puede ser expresado como una función del estado inicial y del vector de entrada, simplemente sustituyendo la ecuación [70] en la ecuación de salida:

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad [71]$$

obteniéndose:

$$y(t) = C \varphi(t) x(0) + \int_0^t C \varphi(t-\tau) B u(\tau) d\tau + D u(t) \quad [72]$$

5 ESTUDIO DE LA ECUACION CARACTERISTICA

Como se ha visto anteriormente, se denomina "ecuación característica" de un sistema dinámico al denominador de la función de transferencia igualado a cero, es decir:

$$|sI - A| = 0 \quad [73]$$

La importancia de esta ecuación en el estudio de los sistemas dinámicos hace que sea necesario su análisis, que se aborda a continuación en sus diferentes

aspectos.

5.1 Autovalores

Se denominan "autovalores" de la matriz A a las raíces, λ_i , de la ecuación característica, cuya principal propiedad es que son invariantes bajo una transformación lineal no singular, es decir, si se transforma la matriz A en A^* mediante la transformación lineal:

$$x = P y \quad [74]$$

siendo la matriz P no singular (determinante no nulo), de tal forma que:

$$A^* = P^{-1} A P \quad [75]$$

entonces la ecuación característica y los autovalores de A^* son idénticos a los de A .

En efecto:

$$\begin{aligned} |s I - A^*| &= |P^{-1} P - P^{-1} A P| = |P^{-1} (s I - A) P| = \\ &= |P^{-1}| |s I - A| |P| = |P^{-1}| |P| |s I - A| \end{aligned} \quad [76]$$

Como el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes, se obtiene:

$$|s I - A^*| = |P^{-1} P| |s I - A| = |s I - A| \quad [77]$$

lo que demuestra que los autovalores de A son invariantes bajo una transformación lineal.

5.2 Autovectores

Se denomina "autovector" a un vector, p_i , $n \times 1$, que satisface la ecuación

matricial:

$$(\lambda_i I - A) p_i = 0 \quad [78]$$

donde λ_i es uno de los autovalores de A. Como muestra la ecuación [78], cada autovector está asociado directamente a un autovalor de la matriz.

5.3 Diagonalización de una matriz: forma canónica

Uno de los motivos principales para diagonalizar una matriz es que, si A es una matriz diagonal (sus autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, supuestos todos distintos, están situados sobre la diagonal principal), entonces la matriz de transición de estados, e^{At} , también será diagonal, siendo sus elementos no nulos $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$.

De momento habrá que suponer que todos los autovalores de A son distintos, ya que, si no es real y simétrica, A no siempre puede ser diagonalizada si tiene autovalores múltiples, como se verá más adelante.

Así pues, el problema que se plantea es encontrar una matriz no singular, P, tal que la transformación $x = P y$ permita obtener una matriz diagonal D de la forma:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = P^{-1} A P \quad [79]$$

es decir, la matriz D tendrá los autovalores de la matriz A situados en la diagonal principal.

Aunque existen diferentes métodos para determinar P, se demostrará que P puede ser formada utilizando los autovectores de A, es decir:

AUTOMATICA

$$P = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ \dots \ p_n] \quad [80]$$

donde p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) es el autovector asociado con el autovalor λ_i . Para ello se utiliza la ecuación de definición de los autovectores, [78], que se puede escribir de la forma:

$$\lambda_i p_i = A p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad [81]$$

Así, formando la matriz $n \times n$:

$$\begin{aligned} [\lambda_1 p_1 \ \lambda_2 p_2 \ \dots \ \lambda_n p_n] &= [A p_1 \ A p_2 \ \dots \ A p_n] = \\ &= A [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n] \end{aligned} \quad [82]$$

o bien:

$$[\lambda_1 p_1 \ \lambda_2 p_2 \ \dots \ \lambda_n p_n] \Delta = A [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n] \quad [83]$$

Así pues, si se hace:

$$P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n] \quad [84]$$

la ecuación [83] permitirá poner:

$$P \Delta = A P \quad [85]$$

o, lo que es lo mismo, premultiplicando por P^{-1} :

$$\Delta = P^{-1} A P \quad [86]$$

que es la transformación buscada.

5.3.1 Utilización de la matriz de Vandermonde

Si la matriz A está en la forma canónica de variables fásicas, lo que sucede en los sistemas SISO, es decir:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{pmatrix} \quad [87]$$

se puede demostrar que la matriz P que diagonaliza A es la matriz de Vandermonde:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad [88]$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de A, distintos entre sí.

5.4 Diagonalización de una matriz: forma canónica de Jordan

En general, cuando una matriz A tiene autovalores múltiples, no puede ser diagonalizada, salvo que la matriz sea simétrica y tenga elementos reales. Sin embargo, existe una transformación:

$$\Delta = P^{-1} A P \quad [89]$$

tal que la matriz Δ es casi siempre una matriz diagonal. La matriz Δ así obtenida se denomina "forma canónica de Jordan" y posee las siguientes propiedades:

- a) Los elementos de la diagonal principal de Δ son los autovalores de A .
- b) Todos los elementos por debajo de la diagonal principal de Δ son nulos.
- c) Algunos de los elementos inmediatamente por encima de los autovalores múltiples de la diagonal principal son 1.
- d) Los 1 junto con los autovalores forman bloques típicos que se llaman "bloques de Jordan".
- e) Cuando la matriz asimétrica A tiene autovalores múltiples, sus autovectores son linealmente dependientes, es decir, para una matriz A ($n \times n$) sólo hay r ($r < n$) autovectores linealmente independientes.
- f) El número de bloques de Jordan es igual al número de autovectores independientes, r , y existe uno y sólo un autovector linealmente independiente asociado a cada bloque de Jordan.
- g) El número de 1 por encima de la diagonal principal es igual a $n - r$.

Como ejemplo de forma canónica de Jordan se puede poner el siguiente:

$$\Delta = \left(\begin{array}{ccc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ & & & & \vdots \\ & & & & - \end{array} \right) \quad [90]$$

donde se muestran los bloques de Jordan y se pueden comprobar las propiedades mencionadas.

La matriz P se determina de la forma siguiente: supóngase que A tiene q

AUTOMATICA

autovalores distintos entre n autovalores. En primer lugar, los autovectores que corresponden a los autovalores de primer orden se determinan de la forma habitual a partir de la ecuación:

$$(\lambda_i I - A) p_i = 0 \quad [91]$$

donde I son cada uno de los q autovalores distintos ($i = 1, 2, \dots, q$).

Si λ_j es un autovalor de orden m , el correspondiente bloque de Jordan de orden m es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \quad (m \times m) \quad [92]$$

con lo cual debe cumplirse la siguiente transformación:

$$[p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m] \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m] \quad [93]$$

o bien:

$$\begin{aligned} \lambda_j p_1 &= A p_1 \\ p_1 + \lambda_j p_2 &= A p_2 \\ \dots & \\ p_2 + \lambda_j p_3 &= A p_3 \\ p_{m-1} + \lambda_j p_m &= A p_m \end{aligned} \quad [94]$$

donde p_1 es el autovector asociado con λ_j y los restantes $m - 1$ vectores, p_2, p_3, \dots, p_m son vectores auxiliares.

Ordenando las ecuaciones vectoriales [94] los m vectores definidos anteriormente pueden ser determinados a partir de las siguientes m ecuaciones vectoriales:

$$\begin{aligned} (\lambda_j I - A) p_1 &= 0 \\ (\lambda_j I - A) p_2 &= -p_1 \\ (\lambda_j I - A) p_3 &= -p_2 \\ \dots & \\ (\lambda_j I - A) p_m &= -p_{m-1} \end{aligned} \quad [95]$$

SISTEMAS DISCRETOS

1 INTRODUCCION.....	1
2 SECUENCIAS Y SISTEMAS DISCRETOS.....	2
2.1 LA ECUACION EN DIFERENCIAS.....	3
3 LA TRANSFORMADA Z.....	3
3.1 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z.....	5
3.2 FUNCION DE TRANSFERENCIA EN Z.....	7
3.3 TRANSFORMADA INVERSA.....	7
4 MUESTREO DE SEÑALES.....	8
4.1 MUESTREADOR IDEAL.....	10
4.2 TRANSFORMADAS DE LA SEÑAL MUESTREADA.....	12
5 RECONSTRUCCION DE SEÑALES.....	14
5.1 BLOQUEADOR DE ORDEN CERO.....	15
6 SISTEMAS HIBRIDOS: FUNCION DE TRANSFERENCIA DE PULSOS.....	17
6.1 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE PULSOS DE ELEMENTOS EN CASCADA.....	21
6.2 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE PULSOS DE SISTEMAS EN LAZO CERRADO.....	23
7 ESTABILIDAD EN EL PLANO Z.....	25

1 INTRODUCCION

Los sistemas de tiempo discreto o sistemas de datos muestreados son sistemas dinámicos en los cuáles una o más variables pueden variar solamente en ciertos instantes. Estos instantes, que se han de indicar por kT o t_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) pueden especificar el momento en el cual se realiza alguna medida física, el tiempo en el cual se lee la memoria de un ordenador digital, etc. En la práctica, se presentan los sistemas de tiempo discreto cuando se obtienen las medidas necesarias para el control de forma intermitente, o cuando se comparte un ordenador de proceso entre varias plantas, de manera que se envía una señal de control a cada planta sólo periódicamente. Muchos sistemas modernos de control son sistemas de tiempo discreto, porque en ellos influyen algunos elementos cuyas entradas y/o salidas son discretas en el tiempo. Sin embargo, a veces la discretización con operación de muestreo puede ser completamente ficticia, introducida únicamente para simplificar el análisis de un sistema de control que, en realidad, sólo contiene elementos continuos.

Antes de abordar el estudio de los sistemas discretos de control, es necesario plantearse una serie de problemas que nacen de las diferencias entre un sistema de control convencional y uno basado en un ordenador. Estas diferencias están basadas en la existencia de los convertidores de señales continuas en discretas y viceversa, y en la del propio ordenador. Así, la introducción de estos elementos exige el estudio de tres problemas relativos a la transformación que las señales sufren al pasar por ellos: muestreo, cuantificación y reconstrucción.

El muestreo es el proceso de toma de muestras de una señal analógica (continua) para su tratamiento por el ordenador (digital). Esta toma de un número de muestras de una señal producirá una pérdida de la información contenida en la misma, por lo que habrá que estudiar las condiciones en las que se produce esta pérdida, intentando que sea mínima.

La cuantificación tiene su origen en el hecho de que el ordenador maneja números con una cantidad limitada de cifras. Esta limitación da lugar a una truncación (despreciando las cifras que excedan de las permitidas por la capacidad del ordenador) o a un redondeo (asignando a todo valor el número inmediato inferior o superior, según lo próximo que esté a él).

La reconstrucción es el problema inverso al muestreo, y tiene como objetivo construir una señal continua que pasa por los puntos que representa a una secuencia de valores dada. Al igual que ocurre con el muestreo, este proceso sólo se puede realizar de forma aproximada, introduciendo nuevas pérdidas de información que habrá que medir y valorar.

Como se ha dicho, los sistemas discretos se caracterizan porque su entrada y su salida son secuencias de valores, por lo que, conjuntamente con el estudio de los mismos, será necesario tratar las secuencias. El estudio que se va a realizar de los sistemas discretos y de las secuencias va a ser similar al que usualmente se realiza al estudiar los sistemas continuos y las señales.

2 SECUENCIAS Y SISTEMAS DISCRETOS

Una secuencia se puede definir como cualquier conjunto numerado de elementos, es decir, haciendo corresponder a cada número entero un elemento de un conjunto, se obtiene una secuencia en dicho conjunto. La forma general de representar una secuencia es $\{x_k\}$, donde k , entero asociado al elemento, es el índice que indica el orden del mismo. Este índice podrá ser positivo o negativo, realizándose esta separación según que los elementos sean anteriores o posteriores al elemento cero, u origen de la secuencia.

Por su parte, un sistema discreto es un algoritmo que permite transformar una secuencia en otra, es decir, que calcula los valores de una secuencia $\{y_k\}$ en función de los de otra, $\{u_k\}$ según la expresión:

$$\{y_k\} = f \{u_k\} \quad [1]$$

Un sistema discreto se puede representar por un bloque cuya entrada es la secuencia $\{u_k\}$ y cuya salida es $\{y_k\}$, tal como muestra la [Figura 1](#).

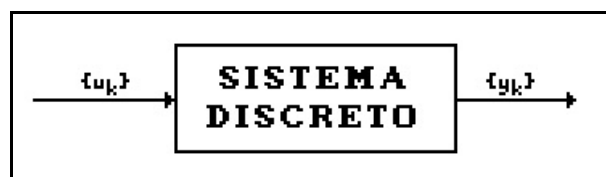


Figura 1 Representación de un sistema discreto

Los sistemas discretos pueden ser

estáticos o dinámicos. Un sistema discreto es estático, cuando el elemento de la

secuencia de salida de un cierto índice depende únicamente del elemento de la secuencia de entrada del mismo índice. Cuando el elemento de la secuencia de salida de un cierto índice es función de otros elementos de las secuencias de entrada y salida de órdenes distinto al suyo, el sistema se denomina dinámico.

Un sistema discreto dinámico es causal, si el valor de un elemento de la secuencia de salida depende únicamente de los de ésta de índice menor o igual. El sistema de la [Figura 1](#) será causal si para cualquier k:

$$Y_k = f(k_{k-1}, Y_{k-2}, Y_{k-3}, \dots, u_k, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots) \quad [2]$$

Si la función que define cada elemento de la secuencia de salida es lineal, el sistema se denomina asimismo lineal. Cuando los coeficientes de la función son constantes, se dice que el sistema lineal es invariante.

En lo sucesivo sólo se van a considerar los sistemas discretos dinámicos, lineales e invariantes, por lo que se omitirán los adjetivos que sirven para su definición.

2.1 LA ECUACION EN DIFERENCIAS

Si el sistema discreto es lineal, se puede expresar de la forma:

$$Y_k = a_1 Y_{k-1} + a_2 Y_{k-2} + \dots + a_n Y_{k-n} + b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_m u_{k-m} \quad [3]$$

siendo m y n finitos y a_i y b_i constantes.

La ecuación [\[3\]](#) usada para definir estos sistemas se denomina "ecuación en diferencias" y juega un papel similar al de las ecuaciones diferenciales lineales en los sistemas continuos. Se tiene, pues, con la ecuación en diferencias, una forma de representar el comportamiento de los sistemas discretos.

3 LA TRANSFORMADA Z

La principal razón que hace fundamental la utilización de la función de transferencia para el estudio de los sistemas lineales continuos es la correlación

existente entre la situación de polos y ceros de éste en el plano s y el comportamiento dinámico del sistema al cual corresponde.

En sistemas lineales discretos esta idea no es del todo generalizable, ya que sus funciones de transferencia no son racionales, con lo que la obtención de singularidades presenta gran dificultad en la mayoría de los casos.

En efecto, dada una secuencia $\{x_k\}$, tal que $x_k = 0$ para $k < 0$, se define la transformada de Laplace como la función:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{-k s} \quad [4]$$

siendo s una variable compleja, con lo que $X^*(s)$ será una función compleja. El hecho de que la ecuación [4] contenga el término e^{-ks} revela la dificultad de usar la transformada de Laplace para el tratamiento general de los sistemas discretos, ya que las funciones de transferencia ya no serán algebraicas, como sucedía en los sistemas continuos.

Con el fin de salvar estas dificultades en el estudio de los sistemas discretos, se introduce una nueva transformación, denominada "transformada Z", siendo la variable compleja z una transformación no lineal de la variable s de Laplace. Así, dada una secuencia real $\{x_k\}$, se define su transformada Z como la función:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} \quad [5]$$

Por simple comparación entre la definición de la transformada de Laplace y la transformada Z, se puede obtener esta última a partir de la de Laplace por medio del cambio:

$$z = e^s \quad [6]$$

Evidentemente, este cambio será únicamente válido para secuencias con $x_k =$

0 para todo $k < 0$, ya que ésta es una de las condiciones impuestas en la definición de la transformada de Laplace.

3.1 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

Con el fin de utilizar la transformada Z de una manera potente y efectiva, conviene conocer las propiedades que verifica. Algunas de ellas son paralelas a las de la transformada de Laplace de señales continuas, aunque hay otras específicas.

a) Linealidad:

$$Z [\alpha x_k + \beta y_k] = \alpha Z [x_k] + \beta Z [y_k] \quad [7]$$

b) Desplazamiento:

Si:

$$Z [x_k] = X(z) \quad [8]$$

se tendrá, para todo entero n:

$$Z [x_{k-n}] = z^{-n} X(z) \quad [9]$$

Si se tiene en cuenta la secuencia impulso:

$$\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, \dots\} \quad [10]$$

cuya transformada es:

$$Z [\delta_k] = 1 \quad [11]$$

la transformada de la secuencia desplazada valdrá:

$$Z [\delta_{k-n}] = z^{-n} \quad [12]$$

debido a lo cual, el operador z^{-1} recibe el nombre de "operador desplazamiento unitario" o simplemente, "operador desplazamiento", ya que al multiplicar la transformada de una secuencia por z^{-1} se obtiene la transformada de la misma secuencia retrasada una unidad.

c) Desplazamiento complejo:

Si:

$$Z [x_k] = X(z) \quad [13]$$

se tendrá, para todo complejo $a \neq 0$:

$$Z [a^k x_k] = X(a^{-1} z) \quad [14]$$

d) Diferenciación:

$$\frac{d X(z)}{d z} = -z^{-1} Z [k x_k] \quad [15]$$

e) Teorema del valor inicial:

En secuencias de términos de índice positivo ($x_k = 0$ para $k < 0$) se verifica que:

$$x_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad [16]$$

f) Teorema del valor final:

En secuencias de términos de índice positivo ($x_k = 0$ para $k < 0$) con transformada $X(z)$ que cumpla que el radio de convergencia de $(1 - z^{-1})X(z)$ sea menor que la unidad, se verifica que:

$$x_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1}) X(z)] \quad [17]$$

3.2 FUNCION DE TRANSFERENCIA EN Z

Como se vió anteriormente, la ecuación en diferencias que define el comportamiento de un sistema dinámico lineal, se puede poner de la forma:

$$Y_k + a_1 Y_{k-1} + a_2 Y_{k-2} + \dots + a_n Y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_m u_{k-m} \quad [18]$$

Esta relación es válida para todo valor de k y, por tanto, se verificará la misma relación entre sus respectivas secuencias:

$$\{y_k\} + a_1 \{y_{k-1}\} + \dots + a_n \{y_{k-n}\} = b_0 \{u_k\} + b_1 \{u_{k-1}\} + \dots + b_m \{u_{k-m}\} \quad [19]$$

Calculando ahora la transformada Z de ambos miembros de la igualdad y teniendo en cuenta las propiedades de linealidad y desplazamiento, se obtiene:

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 U(z) + \dots + b_m z^{-m} U(z) \quad [20]$$

con lo que la función de transferencia en z del sistema será:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad [21]$$

3.3 TRANSFORMADA INVERSA

La primera observación importante que se debe hacer antes de abordar la transformación inversa es el problema de la unicidad: mientras que la transformada de Laplace y su inversa son únicas, la transformada Z y su inversa no lo son. Así, por ejemplo, la transformada Z de la función escalón unitario es $z/(z-1)$, pero su transformada inversa puede ser cualquier secuencia temporal que valga la unidad en los instantes de muestreo.

Para obtener la transformada inversa en z se pueden utilizar tres métodos, que se enumeran a continuación.

a) Descomposición en fracciones simples

Es un método totalmente análogo al empleado con la transformada de Laplace. Ahora bien, si se observan las tablas de transformadas Z se puede constatar que siempre se requiere un factor z en el numerador. Ello significa que la descomposición en fracciones simples debe hacerse para $G(z)/z$, lo que permitirá obtener fracciones que se podrán encontrar directamente en las tablas.

b) Series de potencias

Para obtener la transformada inversa de una función $G(z)$ que viene expresada como un cociente de polinomios en z , se efectúa la división de los polinomios, obteniéndose una serie de potencias en z^{-n} , a la cual es aplicable directamente la definición de la transformada Z , lo que permite obtener inmediatamente su inversa.

c) Cálculo de residuos

A partir de la teoría de la variable compleja se puede obtener la siguiente expresión para la transformada inversa:

$$g_k = \sum_{\text{polos de } G(z)} \left[\text{residuos de } z^{k-1} F(z) \right] \quad [22]$$

teniendo que estar incluido el contorno en el cual se integra dentro de la región de convergencia.

4 MUESTREO DE SEÑALES

El muestreo de una variable, como su nombre indica, es la operación de toma de muestras de la misma. Esta idea general de muestreo, referida a sistemas de control con ordenador, se concreta en la toma de muestras de una señal continua en sucesivos instantes de tiempo, a diferencia de otros procesos de muestreo, donde el tiempo no es una variable a considerar.

El muestreo de señales consiste en la construcción de secuencias a partir de señales continuas, tomando como valores de las secuencias los correspondientes a las señales en instantes consecutivos de tiempo. Esta operación resulta necesaria en el control de procesos con ordenador, ya que el ordenador es un elemento discreto por naturaleza, admitiendo únicamente secuencias como entrada de datos.

El caso más interesante de muestreo es el periódico ([Figura 2](#)), que se caracteriza porque los instantes de toma de muestras están regularmente espaciados, y es el que se utiliza fundamentalmente en el control de procesos con ordenador. Lógicamente, este muestreo estará caracterizado por el intervalo de tiempo entre dos muestras sucesivas, T , que se denomina "período de muestreo", llamando a su inverso, muestras por unidad de tiempo, "frecuencia de muestreo".

El elemento que realiza el proceso de muestreo se denomina "muestreador", siendo la forma usual de representarlo en los diagramas de bloques la indicada en la ([Figura 3](#)).

En este bloque, la salida está relacionada con la entrada por la expresión:

$$x_k = x(kT) \tag{23}$$

Intuitivamente se puede apreciar que el período de muestreo va a jugar un papel fundamental en este proceso y que de él dependerá en gran manera el que se pierda o no información en el mismo. El problema será, por tanto, analizar qué condiciones

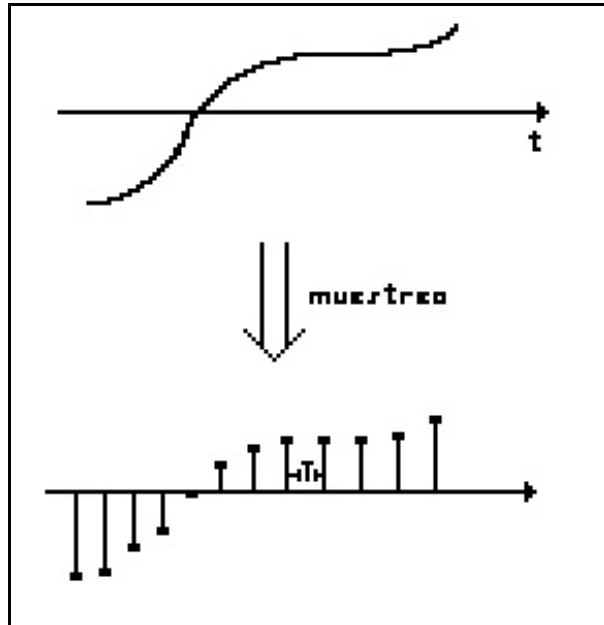


Figura 2 Muestreo periódico de una señal continua

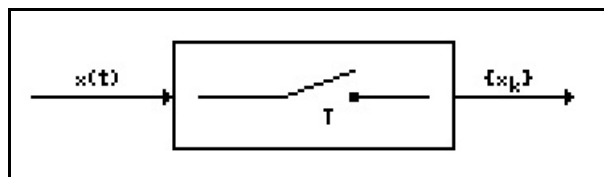


Figura 3 Representación de un bloque muestreador

deben de cumplir las funciones de entrada al muestreador para que, con el período adecuado, la secuencia generada pueda determinar con exactitud dicha entrada.

Estas condiciones vienen fijadas por el "teorema de Shannon", cuyo enunciado es el siguiente: Si se considera que la señal continua $x(t)$ no contiene ningún componente de frecuencia por encima de $\omega_{\text{máx}}$ (rad/s), se puede reconstruir completamente la señal $x(t)$ a partir de la señal muestreada, $x^*(t)$, siempre que la frecuencia de muestreo, ω (rad/s) sea:

$$\omega > 2 \omega_{\text{máx}} \quad [24]$$

o, lo que es lo mismo:

$$T < \frac{T_{\text{máx}}}{2} \quad [25]$$

4.1 MUESTREADOR IDEAL

Un muestreador real, como el de la [Figura 3](#), permanece cerrado durante un período finito de tiempo. Como este tiempo de cierre es normalmente pequeño comparado con el período de muestreo, T , el muestreador real puede ser aceptablemente aproximado a un "muestreador de impulso" o "muestreador ideal". Un muestreador de impulso es un dispositivo que convierte una señal continua en una secuencia de impulsos o funciones delta de Dirac, cuya altura es infinita y cuya anchura es nula. El área del impulso será igual a la magnitud de la función de entrada en el instante del muestreo, es decir:

$$\int_{kT^-}^{kT^+} f^*(t) dt = f(kT) \quad [26]$$

Evidentemente, la función impulso es un modelo matemático, por lo que, rigurosamente, un muestreador de impulso no es físicamente realizable. Sin embargo,

se aproxima bastante a la realidad y se utiliza en el análisis y diseño de los sistemas muestreados, ya que simplifica considerablemente los cálculos.

Con objeto de representar la entrada y la salida del muestreador por expresiones en el dominio del tiempo, se considera que la salida del muestreador es un tren de impulsos ponderados, pudiéndose relacionar la señal continua, $x(t)$, con la salida del muestreador, $x^*(t)$, por la expresión:

$$x^*(t) = \delta_T(t) x(t) \quad [27]$$

donde $\delta_T(t)$ representa un tren de impulsos unitarios espaciados en el tiempo por el período de muestreo T . Es decir, la salida del muestreador es igual al producto de la entrada continua por el tren de impulsos unitarios.

Ahora bien, el impulso unitario que se produce en el instante kT puede expresarse también introduciendo un retardo en el tiempo, es decir:

$$\delta(kT) = \delta(t - kT) \quad [28]$$

Como el impulso tiene el valor finito unidad (distinto de cero) sólo en los instantes kT , siendo $k = 0, 1, \dots$, la salida $x^*(t)$ del muestreador puede ser expresada por la suma:

$$x^*(t) = \delta(t) x(0) + \delta(t - T) x(T) + \delta(t - 2T) + \dots \quad [29]$$

tal como se muestra en la [Figura 4](#), o bien:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) x(kT) \quad [30]$$

para la función de entrada $x(t)$ y $t \geq 0$.

A pesar de que el sumatorio está extendido a todo kT y $x^*(t)$ es una función continua del tiempo en cualquier instante, que es múltiplo de T , el valor de $x^*(t)$ viene dado sólo por el término sencillo:

$$x^* = \delta(t - kT) x(kT) \quad [31]$$

mientras que a instantes diferentes a los tiempos exactos kT , $x^*(t)$ es cero.

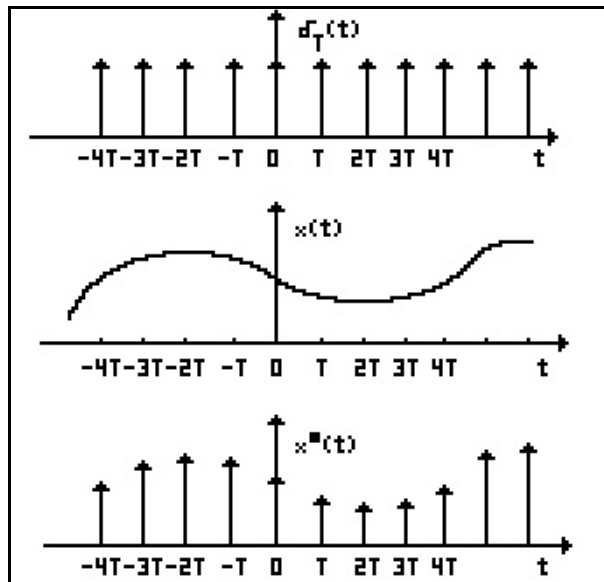


Figura 4 Representación de la señal muestreada

4.2 TRANSFORMADAS DE LA SEÑAL MUESTREADA

La expresión:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) \quad [32]$$

expresa la secuencia de impulsos que salen de un muestreador ideal en el dominio del tiempo. Aplicando a esta ecuación la transformada de Laplace, se obtiene:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} X(kT) e^{-kT s} \quad [33]$$

ecuación de la secuencia de impulsos en el dominio de Laplace.

Si se aplica a [32] la transformada de Fourier, o lo que es lo mismo, se hace en [33] $s = \omega j$, se tendrá:

$$X^*(\omega j) = \sum_{k=0}^{\infty} X(kT) e^{-kT \omega j} \quad [34]$$

expresión que representa la secuencia de impulsos en el dominio de la frecuencia.

Por su parte, si se aplica a [\[32\]](#) la transformada Z, se obtendrá la representación de la secuencia de impulsos en el dominio z:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} X(kT) z^{-k} \quad [35]$$

Comparando convenientemente estas expresiones se puede observar que la relación entre la transformada de Laplace y la transformada Z de una secuencia muestreada es:

$$z = e^{T s} \quad [36]$$

mientras que la relación entre la transformada de Fourier y la transformada Z de dicha secuencia será:

$$z = e^{j \omega T} \quad [37]$$

Obsérvese que en la ecuación [\[35\]](#) se ha omitido el asterisco debido a que sólo se puede aplicar la transformada Z a señales muestreadas, no a funciones continuas. Por otra parte, también se suele utilizar la notación:

$$Z [X^* (s)] = X(z) \quad [38]$$

que tiene exactamente el mismo significado que la ecuación [\[35\]](#), pudiéndose obtener directamente la transformada Z a partir de la transformada de Laplace, ya que generalmente las tablas de transformadas Z también contienen la transformada de Laplace de la función temporal muestreada correspondiente.

Por otro lado, como la transformada Z se puede obtener a partir de la

transformada de Laplace, se puede afirmar que cualquier función continua que posea transformada de Laplace también tendrá transformada Z. Sin embargo, al hallar la transformada Z inversa, sólo se obtendrán valores discretos de la función original para un intervalo de muestreo T que habrá que definir.

5 RECONSTRUCCION DE SEÑALES

Se denomina reconstrucción de señales al proceso por el cual, a partir de una secuencia $\{x_k\}$, se construye una señal continua, $x_r(t)$. El elemento en el cual se realiza esta operación se denomina "bloqueador" o "retenedor" ("hold") y se representa simbólicamente tal como se muestra en la [Figura 5](#).

En sistemas de control es necesario que la reconstrucción en un instante t se realice con valores de la secuencia correspondientes a índices k tales que $kT < t$. Es decir, en cada instante hay que generar una señal reconstruida a partir de la información disponible en ese momento, tal como muestra la [Figura 6](#).

Por tanto, conocido el valor de la señal en el instante kT hay que construir una función continua que aproxime lo más posible la supuesta señal original, hasta conocer el nuevo valor de la secuencia en $(k+1)T$. Esta reconstrucción causal es imposible, por lo cual hay que utilizar algún tipo de aproximación.

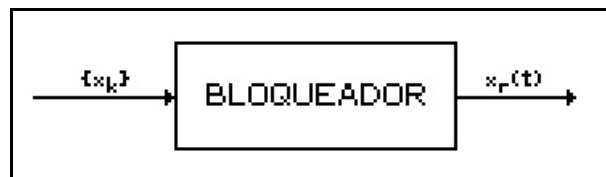


Figura 5 Representación de un bloqueador

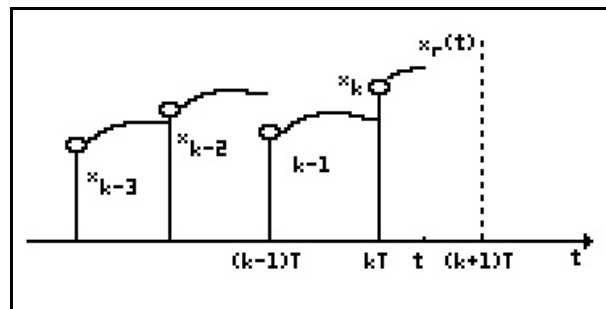


Figura 6 Reconstrucción de una señal por un bloqueador

El problema de la reconstrucción se puede plantear como el del cálculo aproximado del valor de una función, conocida una serie de valores de la misma, es decir, como un problema de interpolación o, en este caso, de extrapolación. El método de interpolación más usual es el polinómico, es decir, aproxima

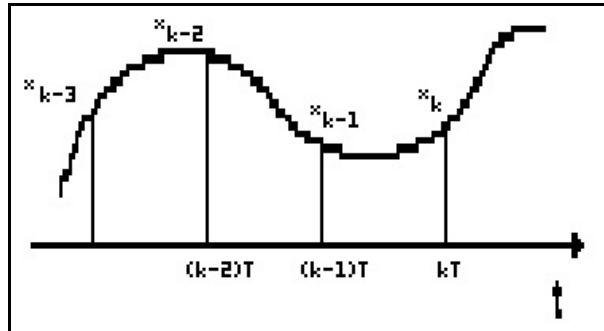


Figura 7 Reconstrucción de una señal por aproximación polinómica

mar la función por un polinomio que pase por los puntos conocidos. Por tanto, el proceso de reconstrucción consistirá en, conocido el valor de la secuencia en kT , obtener para el intervalo $[kT, (k+1)T]$ el polinomio de grado m que pase por los valores de la secuencia en los puntos $(k-m)T, (k-m+1)T, \dots, (k-1)T, kT$, tal como muestra la [Figura 7](#).

Un posible método de cálculo del polinomio de interpolación es mediante la fórmula de Newton, basada en el concepto de cociente incremental y que tiene la forma:

$$\begin{aligned}
 x_r(t) = & x(t_k) + (t - t_k) x[t_k, t_{k-1}] \\
 & + (t - t_k) (t - t_{k-1}) x[t_k, t_{k-1}, t_{k-2}] \\
 & + \dots + (t - t_k) (t - t_{k-1}) \dots (t - t_{k-m+1}) x[t_k, t_{k-1}, \dots, t_{k-m}]
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

y que representa la señal reconstruida por el bloqueador, $x_r(t)$, en el intervalo $[kT, (k+1)T]$ en función de m puntos anteriores.

5.1 BLOQUEADOR DE ORDEN CERO

El bloqueador más sencillo que se puede considerar es el que procede de realizar una interpolación de orden cero, es decir, el que reconstruye la señal $x_r(t)$ tomando únicamente el primer término de la ecuación:

$$x_r(t) = x(t_k) = x(kT) = x_k
 \tag{40}$$

Según se indica en la [Figura 8](#), esta reconstrucción consiste en genera en cada intervalo $[kT, (k+1)T]$, la señal $x_r(t)$ como una constante igual al último valor de la secuencia $\{x_k\}$. Este bloqueador se conoce como "bloqueador de orden cero", o más a menudo por sus siglas inglesas, ZOH ("Zero Order Hold").

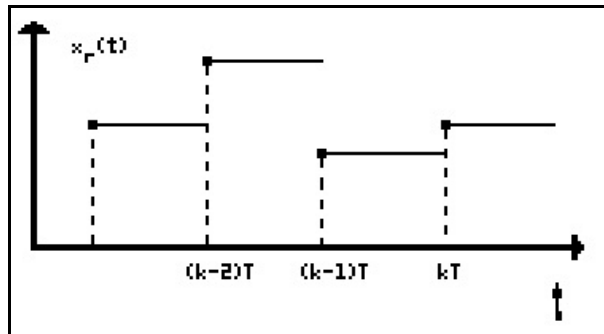


Figura 8 Reconstrucción de una señal por el bloqueador de orden cero

Para calcular la función de transferencia del bloqueador de orden cero basta calcular la transformada de Laplace de su salida ya que, al ser la entrada un impulso unitario, su transformada es la unidad.

Obsérvese que la salida del bloqueador tiene la forma de un escalón unitario, seguido de otro escalón unitario invertido retrasado un tiempo T , es decir:

$$x_r(t) = u(t) - u(t - T) \quad [41]$$

cuya transformada de Laplace será:

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-T s}}{s} = \frac{1 - e^{-T s}}{s} \quad [42]$$

y, por tanto, esta ecuación representa la función de transferencia del bloqueador de orden cero en el dominio de Laplace.

En el dominio de la frecuencia, aplicando la transformada de Fourier a [\[41\]](#) o haciendo $s = \omega j$ en [\[42\]](#):

$$H(\omega j) = \frac{1 - e^{-T\omega j}}{\omega j} \quad [43]$$

6 SISTEMAS HIBRIDOS: FUNCION DE TRANSFERENCIA DE PULSOS

La transformada Z se utiliza en sistemas con datos discretos, en los que juega un papel equivalente al de la transformada de Laplace en los sistemas continuos. En estas condiciones, la "función de transferencia de pulsos" juega asimismo en los sistemas discretos un papel equivalente a la función de transferencia, basada en la transformada de Laplace, en los sistemas continuos.

Sin embargo, generalmente los sistemas que contienen señales discretas, muestreadores y bloqueadores, también contienen sistemas lineales continuos. Estos sistemas se denominan "sistemas híbridos" y son de gran interés práctico. De hecho, el bloqueador de orden cero es en sí mismo un elemento lineal, con lo que el sistema lineal de tiempo discreto puede ser considerado como un conjunto de uno o más muestreadores, que producen los pulsos, y diferentes sistemas lineales continuos.

Para estudiar los sistemas híbridos conviene representar éstos mediante la denominada "secuencia de ponderación", $\{g_k\}$, definida como la secuencia de salida cuando la secuencia de entrada es una secuencia impulso. La secuencia de ponderación contiene la misma información, referente a los sistemas discretos, que la respuesta impulsional respecto a los continuos, permitiendo calcular la respuesta del sistema ante cualquier secuencia de entrada.

En efecto, si $\{u_k\}$ es la secuencia de entrada, ésta se puede representar como una suma de secuencias impulso multiplicadas por constantes, según la expresión:

$$\{u_k\} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \{\delta_{k-n}\} \quad [44]$$

Las secuencias impulsos consideradas están retrasadas un número de posiciones n igual al índice del elemento que se considere en la secuencia $\{u_k\}$.

Por tanto, la secuencia de salida del sistema ante $\{u_k\}$, teniendo en cuenta el principio de linealidad y la descomposición efectuada en [44] será:

$$\{y_k\} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \{g_{k-n}\} \quad [45]$$

donde $\{g_k\}$ es la secuencia de ponderación del sistema considerado.

Esta expresión permite calcular la secuencia de salida de un sistema lineal, con secuencia de ponderación $\{g_k\}$, ante cualquier secuencia de entrada $\{u_k\}$ y se la conoce como "convolución discreta".

Así pues, la respuesta impulsional de un sistema híbrido permite caracterizar su comportamiento ya que, con ella se puede calcular la respuesta del mismo ante cualquier señal de entrada.

Por tanto, considérese el sistema híbrido de la [Figura 9](#). La entrada al sistema, de función de transferencia $G(s)$, es la secuencia de impulsos $x^*(t)$.



Figura 9 Sistema de tiempo discreto

La salida es una señal continua, $y(t)$. Si a

la salida hay otro muestreador sincronizado con el de entrada y que funciona con el mismo período de muestreo, la salida será un tren de impulsos. En ausencia del muestreador de salida, se puede considerar un muestreador ficticio (de las mismas características del ya citado), con lo que se observará una secuencia de valores $y^*(t)$ sólo en los instantes $t = kT$.

Si se considera ahora el impulso k -ésimo de la entrada, $y^*(kT)$, su efecto sobre la salida continua del sistema será:

$$y_k(t) = g(t - kT) x(kT) \quad [46]$$

siendo $y_k(t)$ la respuesta del proceso al impulso k -ésimo y $g(t)$ la respuesta impulsional del proceso, es decir $\mathcal{L}^{-1}[G(s)]$.

Como el sistema es lineal, la salida $y(t)$ será la suma de todas las y_k , es decir, la suma de las respuestas impulsionales ponderadas con y_k y desplazadas en el tiempo hasta el instante de aparición del correspondiente impulso, es decir, retardadas en un tiempo kT ; por tanto:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(t - kT) x(kT) \quad [47]$$

Los valores de la salida $y(t)$ en los instantes de muestreo, $t = nT$, se expresan como $y(nT)$, siendo:

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} g(nT - kT) x(kT) \quad [48]$$

Como la función continua $y(t)$ que sale del proceso se somete a muestreo, produciendo una secuencia de impulsos $y^*(t)$, si se aplica la transformada Z a $y^*(t)$ se obtiene:

$$Z[y^*(t)] = Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT) z^{-n} \quad [49]$$

o bien, sustituyendo [\[48\]](#) en [\[49\]](#):

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} g(nT - kT) x(kT) \right] z^{-n} \quad [50]$$

Haciendo $m = n - k$ y recordando que $g(t) = 0$ para $t < 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g(mT) x(kT) z^{-m+k} \\ &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} g(mT) z^{-m} \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} \right] \quad [51] \\ &= G(z) X(z) \end{aligned}$$

siendo el primer miembro de la ecuación [\[51\]](#) la "función de transferencia de pulsos", $G(z)$:

$$G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} g(mT) z^{-m} \quad [52]$$

es decir, la transformada Z de $g^*(t)$, respuesta impulsional muestreada del sistema a un impulso unitario $\delta(t)$. Definiendo $G(z)$ de esta forma se pueden utilizar las funciones de transferencia en el dominio z de la misma forma que se utilizan las funciones de transferencia en el dominio de Laplace.

En definitiva, para obtener la función de transferencia de pulsos de un sistema se pueden seguir los siguientes pasos:

- a) Obtener la función de transferencia $G(s)$ del sistema.
- b) Obtener la función respuesta impulsional, $g(t) = \mathcal{L}^{-1} [G(s)]$.

- c) Calcular $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT) z^{-k}$, donde $g(kT)$ se obtiene a

reemplazando kT por t .

Obsérvese, no obstante, que si se poseen tablas de transformadas de Laplace y Z paralelas, los pasos a) y b) se pueden realizar de forma simultánea haciendo:

$$G(z) = Z [G(s)] \quad [53]$$

lo que agiliza considerablemente los cálculos.

Es importante recordar que en el procedimiento de función de transferencia de pulsos desarrollado aquí, aplicado al análisis de sistemas de tiempo discreto, se supone a la señal muestreada como un tren de impulsos cuyas intensidades o áreas son iguales a la señal continua en el tiempo de los instantes de muestreo. Esta suposición es válida solamente si la duración del muestreo es pequeña en comparación con la constante de tiempo más grande del sistema.

6.1 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE PULSOS DE ELEMENTOS EN

CASCADA

La representación como funciones de transferencia de los sistemas discretos con elementos en cascada es ligeramente diferente de la de los sistemas continuos, debido a la variación que se produce por el hecho de existir o no muestreadores entre los elementos. La [Figura 10](#) muestra dos situaciones diferentes de un sistema discreto que contiene dos elementos en cascada.

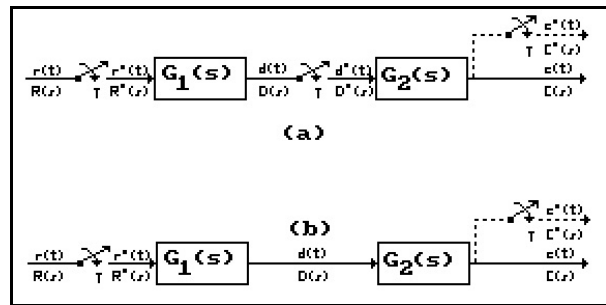


Figura 10 Sistemas de tiempo discreto en cascada

En el sistema (a) los dos elementos están separados por un muestreador S_2 que está sincronizado y tiene el mismo período que el muestreador S_1 . En este caso, la salida del elemento $G_1(s)$ será:

$$D(s) = G_1(s) R^*(s) \tag{54}$$

y la salida del sistema:

$$C(s) = G_2(s) D^*(s) \tag{55}$$

Como $D(s)$ está muestreada, se podrá poner [\[54\]](#) de la forma:

$$D^*(s) = G_1^*(s) R^*(s) \tag{56}$$

Si entrada y salida son discretas, se podrá "discretizar" la función de transferencia, con lo cual:

$$D^*(s) = G_1^*(s) R^*(s) \tag{57}$$

De forma análoga, si se sitúa un muestreador ficticio a la salida de $G_2(s)$, se

podrá poner [55] de la forma:

$$C^*(s) = G_2^*(s) D^*(s) \quad [58]$$

Sustituyendo [57] en [58] se obtendrá, pues:

$$C^*(s) = G_1^*(s) G_2^*(s) R^*(s) \quad [59]$$

Como todas las funciones de transferencia son discretas, se puede aplicar la transformada Z:

$$C(z) = G_1(z) G_2(z) R(z) \quad [60]$$

Esto permite concluir que la transformada Z de dos sistemas lineales separados por un muestreador es igual al producto de las transformadas Z de las dos funciones de transferencia individuales.

Por otro lado, en el sistema (b), los dos elementos de la cascada están conectados directamente, por lo que la transformada de Laplace de la salida del sistema será:

$$9C(s) = G_1(s) G_2(s) R^*(s) \quad [61]$$

Situando un muestreador ficticio a la salida de $G_2(s)$ se podrá poner:

$$C^*(s) = G_1(s) G_2(s) R^*(s) \quad [62]$$

y en este caso la función de transferencia que se podrá discretizar será $G_1(s) G_2(s)$, es decir:

$$C^*(s) = [G_1(s) G_2(s)]^* R^*(s) \quad [63]$$

AUTOMATICA

Obsérvese, pues, que si ambos elementos no están separados por un muestreador, han de ser tratados como uno solo al aplicar la función de transferencia de pulsos. Así, aplicando la transformada Z a [63] se obtendrá:

$$C(z) = G_1 G_2(z) R(z) \quad [64]$$

donde $G_1 G_2(z)$ es la transformada Z del producto de $G_1(s)$ y $G_2(s)$ y ha de ser tratada como una función individual, es decir:

$$G_1 G_2(z) \neq G_1(z) G_2(z) \quad [65]$$

Todo ello permite concluir que la transformada Z de dos elementos en cascada sin muestreador entre ellos es igual a la transformada Z del producto de las funciones de transferencia de los dos elementos.

6.2 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE PULSOS DE SISTEMAS EN LAZO CERRADO

Considérese el sistema de lazo cerrado mostrado en la [Figura 11](#).

La transformada de la salida es:

$$C(s) = G(s) E^*(s) \quad [66]$$

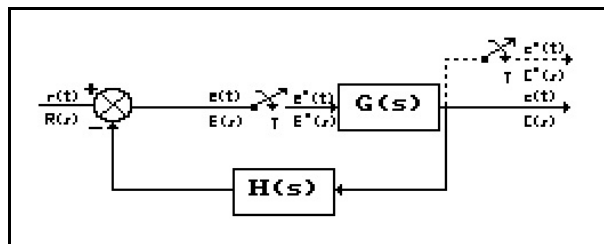


Figura 11 Sistema de tiempo discreto en lazo cerrado

mientras que la de la señal continua de error será:

$$E(s) = R(s) - H(s) C(s) \quad [67]$$

Teniendo en cuenta que tanto E como C son muestreadas (la segunda de forma ficticia), se podrá obtener la función de transferencia de pulsos en ambas ecuaciones,

sustituyendo [66] en [67]:

$$E^*(s) = R^*(s) - G(s) H(s) E^*(s) \quad [68]$$

o bien:

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + [G(s) H(s)]^*} \quad [69]$$

Sustituyendo [69] en [66], considerando esta última ya como funciones de transferencia de pulsos, queda:

$$C^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + [G(s) H(s)]^*} R^*(s) \quad [70]$$

En este caso se puede definir la función de transferencia global del sistema $C^*(s)/R^*(s)$, y aplicando la transformada Z:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(Z)} \quad [71]$$

Sin embargo, no siempre se puede definir la función de transferencia global de un sistema discreto. Así, considérese el sistema mostrado en la [Figura 12](#).

Las ecuaciones de este sistema serán:

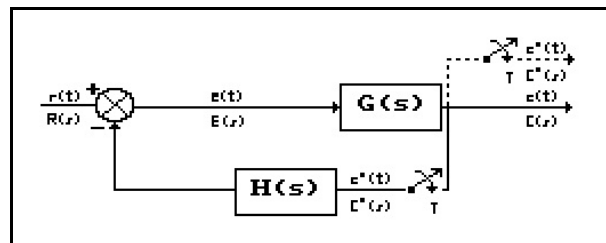


Figura 12 Sistema de tiempo discreto en lazo cerrado

$$C^*(s) = G(s) E(s) \quad [72]$$

$$E(s) = R(s) - H(s) C^*(s) \quad [73]$$

Sustituyendo [73] en [72]:

$$C^*(s) = G(s) R(s) - G(s) H(s) C^*(s) \quad [74]$$

Obsérvese que, como R(s) no es muestreada sólo se puede aplicar la transformada Z al producto de las funciones de transferencia, obteniéndose:

$$C^*(s) = \frac{[G(s) R(s)]^*}{1 + [G(s) H(s)]^*} \quad [75]$$

cuya transformada Z es:

$$C(z) = \frac{GR(z)}{1 + GH(z)} \quad [76]$$

En definitiva, como la entrada y la función G(s) están combinadas en una sola función , GR(z), no pueden ser separadas en este caso para definir una función de transferencia de pulsos global, C(z)/R(z).

7 ESTABILIDAD EN EL PLANO Z

La estabilidad de un sistema lineal continuo viene determinada por la situación de las raíces de su ecuación característica, un polinomio en la variable compleja s. Si todas las raíces de este polinomio están en el semiplano izquierdo del plano s, el sistema es estable. Para un sistema continuo en lazo cerrado, todas las raíces de [1 + G(s)H(s)] tienen que estar en el semiplano izquierdo del plano s. Por todo ello, la región de estabilidad de un sistema continuo es el semiplano izquierdo de s.

La estabilidad de un sistema discreto vendrá determinada por la situación de las

AUTOMATICA

raíces de una ecuación característica que es un polinomio en la variable compleja z . Las raíces de este polinomio se representan en el plano z : la ordenada es la parte imaginaria de z y la abscisa es la parte real de z .

La región de estabilidad en el plano z puede encontrarse directamente a partir de la región de estabilidad en el plano s usando la relación básica entre las variables complejas s y z :

$$z = e^{T s} \quad [77]$$

Si α es la parte real de s y ω es su parte imaginaria, se puede poner:

$$s = \alpha + \omega j \quad [78]$$

La región de estabilidad en el plano s es aquella en la que α , la parte real de s , es negativa. Sustituyendo [78] en [77] se obtiene:

$$z = e^{T (\alpha + \omega j)} = e^{\alpha T} e^{\omega T j} \quad [79]$$

es decir:

$$|z| = e^{\alpha T} \quad [80]$$

$$\arg z = \omega T \quad [81]$$

Por tanto, la amplitud de z varía entre 0 y 1. El eje imaginario ($\alpha = 0$) corresponde al círculo unitario en el plano z . El interior del círculo corresponde al semiplano izquierdo de s . Según la expresión del argumento, el ángulo de z varía desde $-\infty$ a ∞ a medida que ω varía desde $-\infty$ a ∞ . Se puede asimismo comprobar que cada franja de ancho $2\pi/T$ en el semiplano izquierdo s se proyecta en una vuelta en el interior del círculo unitario en el plano z , como muestra la [Figura 13 \(a\)](#). En la [Figura 13 \(b\) y \(c\)](#) se pueden ver las regiones correspondientes en los planos s y z .

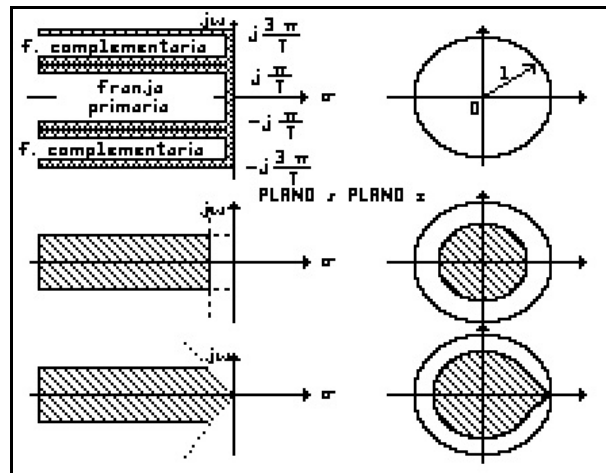


Figura 13 Transformación del plano s en el plano z

Con respecto a los sistemas en lazo cerrado, si se considera uno con una función de transferencia de pulsos:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \quad [82]$$

se puede determinar su estabilidad por la ubicación de las raíces de la ecuación característica:

$$1 + GH(z) = 0 \quad [83]$$

Es decir, si todas las raíces de este polinomio en z están en el interior del círculo unitario, el sistema en lazo cerrado será estable. El sistema se volverá inestable si cualquiera de los polos de lazo cerrado cae fuera del círculo unitario y/o hay polos múltiples sobre el círculo unitario.

Se dispone de algunos métodos para determinar si un polinomio en z contiene o no una o varias raíces sobre o fuera del círculo unitario, uno de los cuales consiste en modificar el criterio de estabilidad de Routh para sistemas continuos. Para ello se

hace la transformación:

$$z = \frac{r + 1}{r - 1} \quad [84]$$

que convierte el interior del círculo unitario en el plano z en un semiplano izquierdo r y, por tanto, se puede aplicar el criterio de estabilidad de Routh al polinomio en r del mismo modo que a los sistemas continuos en el tiempo.

**REPRESENTACION DE SISTEMAS DINAMICOS DISCRETOS
MEDIANTE VARIABLES DE ESTADO**

1 INTRODUCCION.....	1
2 ECUACIONES DE ESTADO Y SALIDA.	1
2.1 OBTENCION DE LA ECUACION DE ESTADO DISCRETA A PARTIR DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS.	2
2.2 OBTENCION DE LA ECUACION DE ESTADO DISCRETA A PARTIR DE LA ECUACION DE ESTADO CONTINUA.	4
3 RESOLUCION DE LA ECUACION DE ESTADO DISCRETA.....	7
3.1 SOLUCION DE LA ECUACION EN DIFERENCIAS DE FORMA RECURSI- VA.	8
3.2 APLICACION DE LA TRANSFORMADA Z.	9
3.3 ECUACION DE SALIDA.	11
4 RELACION ENTRE ECUACION DE ESTADO Y FUNCION DE TRANSFERENCIA DISCRETAS.	11

1 INTRODUCCION

De forma similar al caso de los sistemas continuos, una manera moderna de modelar un sistema discreto es mediante las ecuaciones de estado discretas. Como ya se ha visto anteriormente, cuando se trata con sistemas discretos, frecuentemente se producen dos situaciones diferentes.

La primera de ellas es que los componentes del sistema son elementos continuos, pero en ciertos puntos del sistema las señales son discretas o discontinuas con respecto al tiempo, debido a operaciones de muestreo - bloqueo. En este caso, los componentes del sistema vienen descritos por ecuaciones diferenciales pero, debido a los datos discretos, puede ser generado un conjunto de ecuaciones en diferencias a partir de las ecuaciones diferenciales originales.

La segunda situación implica sistemas que son completamente discretos con respecto al tiempo, en el sentido de que reciben y envían sólo datos discretos, como en el caso de los controladores u ordenadores digitales. Bajo esta condición, la dinámica del sistema ha de ser descrita por ecuaciones en diferencias.

2 ECUACIONES DE ESTADO Y SALIDA

Se puede aplicar el método del estado para el análisis de sistemas dinámicos al caso de tiempo discreto. La forma discreta de representación del estado de un sistema es bastante análoga a la forma continua, es decir, la expresión que describe el estado del sistema en cualquier instante $k+1$ viene dada por una ecuación de la forma:

$$x(k + 1) = f[x(k), u(k)] \quad [1]$$

Expresión que establece que el estado x en el instante $k+1$ es una función del estado y de la entrada en el instante k .

La salida del sistema se define de forma similar al caso continuo:

$$y(k) = g[x(k), u(k)] \quad [2]$$

Si el sistema es lineal e invariante en el tiempo, las ecuaciones de estado y salida se reducen, respectivamente, a:

$$x(k + 1) = A x(k) + B u(k) \quad [3]$$

$$y(k) = C x(k) + D u(k) \quad [4]$$

donde $x(k)$ es el vector de estado, $u(k)$ es el vector de entrada e $y(k)$ es el vector de salida, cada uno de ellos especificado en $t = kT$, donde $k = 0, 1, 2, \dots$ y T es el período de muestreo. Obsérvese que, a menos que se indique lo contrario, se utiliza la notación simplificada $x(k)$ para indicar $x(kT)$, es decir, $x(k)$ implica el vector $x(t)$ en $t = kT$.

Las ecuaciones de tiempo discreto [3] y [4] pueden aparecer de dos maneras:

Primero, pueden provenir de la descripción directa del comportamiento del sistema, que se puede obtener inmediatamente en forma de ecuaciones en diferencias.

Segundo, pueden estar describiendo un sistema continuo que está siendo muestreado en ciertos intervalos de tiempo, o que se haya "discretizado" para facilitar su cálculo o control.

2.1 OBTENCION DE LA ECUACION DE ESTADO DISCRETA A PARTIR DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Considérese un sistema con una sola variable de entrada, $u(k)$ y una sola variable de salida, $y(k)$, que viene representado por una ecuación en diferencias:

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + a_2 y(k+n-2) + \dots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = b u(k) \quad [5]$$

Se trata de representar esta ecuación por n ecuaciones de estado y una

AUTOMATICA

ecuación de salida, lo que se puede hacer simplemente definiendo n variables de estado en términos de la salida y del instante de muestreo posterior, es decir:

$$\begin{aligned}
 x_1(k) &= y(k) \\
 x_1(k+1) &= x_2(k) \\
 x_2(k+1) &= x_3(k) \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 x_{n-1}(k+1) &= x_n(k) \\
 x_n(k+1) &= -a_1 x_n(k) - a_2 x_{n-1}(k) - \dots - a_n x_1(k) + b u(k)
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

donde la última ecuación se obtiene igualando el término de salida de más alto orden al resto de la ecuación en diferencias, [5].

La ecuación de salida es, simplemente:

$$y(k) = x_1(k) \tag{7}$$

Las ecuaciones de estado en forma matricial quedarán ahora:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ b \end{pmatrix} u(k) \tag{8}$$

La ecuación de salida queda, en forma matricial:

$$y(k) = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{pmatrix} \quad [9]$$

En definitiva, las ecuaciones que describen el estado del sistema serán:

Ecuación de estado:

$$x(k+1) = A x(k) + b u(k) \quad [10]$$

Ecuación de salida:

$$y(k) = c x(k) \quad [11]$$

Obsérvese que, en este caso, b y c son magnitudes escalares, ya que tanto la entrada, $u(k)$, como la salida, $y(k)$ también lo son, al ser únicas.

2.2 OBTENCION DE LA ECUACION DE ESTADO DISCRETA A PARTIR DE LA ECUACION DE ESTADO CONTINUA

Si se desea calcular el estado $x(t)$ utilizando un ordenador digital, hay que convertir una ecuación de estado de tiempo continuo en una ecuación de estado de tiempo discreto.

Considérese que cada elemento del vector de entrada sólo cambia su valor en los instantes de muestreo, kT y que permanece constante en el intervalo comprendido entre dos instantes de muestreo consecutivos, es decir:

AUTOMATICA

$$u(t) = u(kT) \quad [kT < t < (k+1)T] \quad [12]$$

En lo que sigue, y para clarificar el análisis, se utilizará la notación kT y $(k+1)T$ en lugar de k y $k+1$.

Recuérdese que la solución de la ecuación de estado para un sistema continuo:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad [13]$$

es:

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad [14]$$

Considerando un instante inicial $x(0)$, la ecuación [14] permite obtener los valores en el tiempo $t = kT$ y $t = (k+1)T$, es decir:

$$x(kT) = e^{AkT} x(0) + e^{AkT} \int_0^{kT} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau \quad [15]$$

$$x[(k+1)T] = e^{A(k+1)T} x(0) + e^{A(k+1)T} \int_0^{(k+1)T} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau \quad [16]$$

Despejando $x(0)$ de la ecuación [15] y sustituyéndolo en la [16], se obtiene:

$$x[(k+1)T] = e^{At} x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-\tau]} B u(\tau) d\tau \quad [17]$$

o sustituyendo:

AUTOMATICA

$$\lambda = \tau - kT \quad [18]$$

$$d\lambda = d\tau \quad [19]$$

quedará:

$$x[(k+1)T] = e^{At}x(kT) + \int_0^T e^{A(T-\lambda)} B u(kT) d\lambda \quad [20]$$

ya que $u(kT)$ es constante durante el período comprendido entre kT y $(k+1)T$.

Definiendo ahora las matrices:

$$A' = e^{AT} \quad [21]$$

$$B' = \int_0^T e^{A(t-\lambda)} B d\lambda \quad [22]$$

se obtiene la ecuación de estado discreta:

$$x[(k+1)T] = A' x(kT) + B' u(kT) \quad [23]$$

La absoluta similitud de las ecuaciones [21] y [22] con las correspondientes a los sistemas continuos, permite evaluar A' y B' mediante la matriz de transición de estados del sistema continuo, haciendo $t = T$, es decir:

$$A' = \varphi(T) = [\mathcal{L}^{-1} (sI - A)^{-1}]_{t=T} \quad [24]$$

$$B' = \int_0^T \varphi(\lambda) d\lambda \quad [25]$$

Finalmente, resulta evidente que, si el sistema posee una sola salida, su ecuación de salida vendrá dada por:

$$y(kT) = C x(kT) \quad [26]$$

3 RESOLUCION DE LA ECUACION DE ESTADO DISCRETA

La resolución de la ecuación de estado implica obtener la solución $x(k)$ para la ecuación en diferencias (ecuación de estado discreta):

$$x(k+1) = A'x(k) + B'u(k) \quad [27]$$

Si existe otra relación adicional, como puede ser la ecuación de salida:

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad [28]$$

se puede obtener directamente $y(k)$ a partir de $x(k)$ si C y D son matrices constantes.

Existen dos métodos para resolver la ecuación de estado: solución de la ecuación en diferencias de forma recursiva y aplicación de la transformada Z .

3.1 SOLUCION DE LA ECUACION EN DIFERENCIAS DE FORMA RECURSIVA

La solución de la ecuación de estado, [\[27\]](#), puede obtenerse directamente por recurrencia haciendo:

$$\begin{aligned} x(1) &= A'x(0) + B'u(0) \\ x(2) &= A'x(1) + B'u(1) \\ &= A'[A'x(0) + B'u(0)] + B'u(1) \\ &= (A')^2x(0) + A'B'u(0) + B'u(1) \\ x(3) &= (A')^3x(0) + (A')^2B'u(0) + A'B'u(1) + B'u(2) \\ x(4) &= \dots \end{aligned} \quad [29]$$

Repitiendo este procedimiento se obtiene la solución general:

$$x(k) = (A')^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} (A')^{(k-1-j)} B'u(j) \quad \{k = 1, 2, 3, \dots\} \quad [30]$$

Se puede observar claramente de [30] que $x(k)$ consiste de dos partes: una, que representa la contribución del estado inicial, $x(0)$ y la otra, la contribución de la entrada, $u(j)$, para $j = 1, 2, \dots, (k-1)$.

De la ecuación [30] se puede deducir también que la matriz de transición de estados del sistema discreto es:

$$\varphi(k) = (A')^k \quad [31]$$

matriz única que satisface las condiciones:

$$\varphi(k+1) = A'\varphi(k) \quad [32]$$

$$\varphi(0) = I \quad [33]$$

Así pues, en términos de la matriz de transición de estados se puede escribir la solución de la ecuación de estado discreta de la forma:

$$x(k) = \varphi(k)x(0) + \sum_{j=0}^{(k-1)} \varphi(k-1-j)B'u(j) \quad [34]$$

3.2 APLICACION DE LA TRANSFORMADA Z

Aplicando la transformada Z a ambos miembros de la ecuación de estado, [27]:

$$zX(z) - z x(0) = A'X(z) + B'U(z) \quad [35]$$

Reordenando:

AUTOMATICA

$$(zI - A') X(z) = z x(0) + B'U(z) \quad [36]$$

donde se ha introducido la matriz identidad, I, para conservar la identidad de la ecuación. Multiplicando ambos miembros de la ecuación [36] por $(zI - A')^{-1}$, se obtiene:

$$X(z) = (zI - A')^{-1} z x(0) + (zI - A')^{-1} B'U(z) \quad [37]$$

Tomando en ambos miembros de la ecuación [37] la transformada inversa, se tiene:

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1} [(zI - A')^{-1} z] x(0) + \mathcal{Z}^{-1} [(zI - A')^{-1} B'U(z)] \quad [38]$$

Se puede demostrar ahora que:

$$\mathcal{Z}^{-1} [(zI - A')^{-1} z] = (A')^k \quad [39]$$

y que:

$$\mathcal{Z}^{-1} [(zI - A')^{-1} B'U(z)] = \sum_{j=0}^{k-1} (A')^{(k-1-j)} B'U(j) \quad [40]$$

con lo cual, si se sustituyen [39] y [40] en [38] y se tiene en cuenta la definición de matriz de transición de estados discreta, ecuación [31], se tendrá:

$$x(k) = \varphi(k) x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \varphi(k-1-j) B'U(j) \quad [41]$$

ecuación completamente idéntica a [34].

3.3 ECUACION DE SALIDA

AUTOMATICA

Una vez determinada la ecuación de transición de estados discreta, el vector de salida puede ser expresado como una función del estado inicial y del vector de entrada, simplemente sustituyendo la ecuación [41] en la ecuación de salida discreta, [28], obteniéndose:

$$y(k) = C \varphi(k) x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} C \varphi(k-1-j) B' U(j) + D u(k) \quad [42]$$

4 RELACION ENTRE ECUACION DE ESTADO Y FUNCION DE TRANSFERENCIA DISCRETAS

Tomando la transformada Z en las ecuaciones de estado y salida discretas, [3] y [4], para condiciones iniciales nulas, se obtiene:

$$z X(z) = A' X(z) + B' U(z) \quad [43]$$

$$Y(z) = C X(z) + D U(z) \quad [44]$$

Agrupando términos en la ecuación [43], introduciendo la matriz identidad y multiplicando ambos miembros por $(zI - A')^{-1}$, se obtiene:

$$X(z) = (zI - A')^{-1} B' U(z) \quad [45]$$

que sustituida en [44] da:

$$Y(z) = C (zI - A')^{-1} B' U(z) + D U(z) \quad [46]$$

o bien:

AUTOMATICA

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C (zI - A')^{-1} B' + D \quad [47]$$

Si se sustituye la matriz inversa en función de su adjunta y su determinante, al igual que se llevó a cabo para los sistemas continuos, se obtendrá:

$$G(z) = C \frac{\text{adj} (zI - A')}{|zI - A'|} B' + D \quad [48]$$

Al igual que en los sistemas continuos, si el sistema discreto tiene una sola variable de entrada y una sola variable de salida, se cumplirá que $D = 0$, por lo que la ecuación [48] se simplifica a:

$$G(z) = C \frac{\text{adj} (zI - A')}{|zI - A'|} B' \quad [49]$$

siendo asimismo la ecuación característica del sistema:

$$|zI - A'| = 0 \quad [50]$$